Задачі Олімпіади KAU-uDataSchool з фізики.

Задача 1.

Диск, приєднаний до опори двома мотузками (дивись малюнок нижче), здійснює коливальні рухи. Коли диск досягає нижнього положення він починає підніматися вгору, надаючи "ривок" ниткам. З яким прискоренням піднімається диск? Знайдіть натяг ниток під час підйому, спуску та ривка. Маса диска $M = 1$ кг, радиус його $R = 10$ см, а радіус валика $r = 0,5$ см. Знехтувати масою валика. Довжина намотаної нитки $l = 50$ см. (7 балів)

Рішення задачі 1.

I) З другого закону Ньютона та рівняння динаміки обертального руху отримуємо систему рівнянь

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_t, \tag{1}$$

$$J\vec{\epsilon} = \vec{r} \times \vec{F}_t. \tag{2}$$

де

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{1,t} + \vec{F}_{2,t}, \quad \vec{F}_{1,t} = \vec{F}_{2,t}$$

$\vec{F}_{1,t}, \vec{F}_{2,t}$ – сили натягу першої та другої мотузок,
$\vec{\epsilon}$ – кутове прискорення,
$J = \frac{MR^2}{2}$ – момент інерції диску.
Проекції (1) на вісь Y та (2) на вісь Z дають

$$Ma = Mg - F_t, \tag{3}$$

$$\frac{MR^2}{2}\epsilon = rF_t. \tag{4}$$

Оскільки нема проковзування між ниткою та валиком, то $a = \epsilon r$ тоді з (3) та (4) маємо

$$Mgr^2 = Mar^2 + a\frac{MR^2}{2} \tag{5}$$

і звідси отримуємо

$$a = g\frac{1}{1 + 2r^2/R^2}. \tag{6}$$

З (3) знаходимо натяг нитки

$$F_t = Mg\frac{1}{1 + 2r^2/R^2} \approx 9,76\,\text{n}. \tag{7}$$

Сила натягу однієї нитки $\vec{F}_{1,t} \approx 4,88\,\text{n}$.

Сила натягу нитки однакова при підйомі і при спуску диску.

II) Для знаходження натягу нитки під час ривка використовуємо закон збереження енергії та закон збереження імпульсу

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = Mg\,l, \tag{8}$$

$$M\vec{v}_2 - M\vec{v}_1 = (\vec{F}_t + M\vec{g})t, \tag{9}$$

де тривалість ривка $t = \frac{\pi r}{v}$ та v швидкість диску в момент ривка.
$\vec{v}_2$ – швидкість після ривка,
$\vec{v}_1$ – швидкість до ривка,
тоді для проекціїі $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ на вісь Y знаходимо $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)_y = 2v$ та

$$v = 2\sqrt{\frac{gl}{2 + R^2/r^2}}. \tag{10}$$

Використовуючи цей вираз, отримуємо

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2r^2 + R^2}{gl}}. \tag{11}$$

З рівняння (9) знаходимо

$$F_t = Mg + \frac{2mv}{t} = Mg\left(1 + \frac{8lr}{\pi(2r^2 + R^2)}\right) \approx 16\,\text{n}. \tag{12}$$

і сила натягу для кожної нитки $\vec{F}_{i,t} \approx 8\,\text{n}$.

Задача 2.

Пасивний нелінійний елемент НЭ (тунельний діод) з'єднаний послідовно з резистором опором $R = 500$ Ом і підключений до джерела постійної регульованої напруги. Вольт-амперна характеристика діода наведена на графіку нижче. Побудуйте графік залежності сили струму в електичному ланцюгу при повільній зміні напруги джерела від 0 до 2 вольт і назад від 2 до 0 вольт. (7 балів)

Рішення задачі 2.

Позначимо струм, який протікає через тунельний діод, через I, напругу на тунельному діоді через U та напругу джерела через U_0.

Згідно другого закону Кіргофа $IR + U = U_0$. Звідси

$$I(t) = \frac{1}{R}(U_0(t) - U) \tag{13}$$

де $U_0(t)$ змінюється з часом t, спочатку зростає від 0 В до 2 В, а потім зменшується від 2 В до 0 В. Залежність I від U_0 можна знайти через перетин двух прямих – прямої що задається рівнянням (1) та прямих що апроксимують участки вольт-амперної характеристики тунельного діода.

Для зручності позначимо участки вольт-амперної характеристики тунельного діода, які можна апроксимувати прямими лініями, наступним чином:
$VA1$ – участок від 0 мВ до 150 мВ,
$VA2$ – участок від 200 мВ до 400 мВ,
$VA3$ – участок від 500 мВ до 2000 мВ,

З вольт-амперної характеристики тунельного діода маємо:
на участку $VA1$ – пряму

$$I = \frac{U}{500} \tag{14}$$

на участку $VA3$ – пряму

$$I = \alpha U - \beta, \quad \alpha = 0,013\,(\mathrm{Om})^{-1}, \quad \beta = 5,4\,\mathrm{mA} \tag{15}$$

I) Розглянемо спочатку зростання U_0 від 0 В до 2 В.

На участку $VA1$ рух точки перетину прямих (13) та (14) задається рівнянням

$$I(t) = \frac{U_0(t)}{550}. \tag{16}$$

При збільшенні U_0 точка перетину після $I_{max} = 2,6\,mA$ перескакує на пряму (15) і її рух описується рівнянням

$$I(t) = \frac{\alpha U_0(t) - \beta}{1 + \beta R} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} U_0(t) - 0,77. \tag{17}$$

II) Розглянемо тепер зменшення U_0 від 2 В до 0 В.

При зменшенні U_0 точка перетину спочатку рухається по прямій (15) і її рух описується рівнянням (17) та після досягнення $I_{min} = 0,3\,mA$ точка перетину перескакує на пряму (14) і її рух описується рівнянням (16).

Ці результати легко відобразити на графіку, наприклад в осях $I(t)$, t , задав лінійну залежність$U_0(t)$ на відповідних участках.

Задача 3.

Рухомий поршень розділяє горизонтальний циліндр на дві частини з рівним об'ємом $V_0 = 10^{-3}$ (м)^3. В одній частині знаходиться сухе повітря, у другій – водна пара і $m = 4$ г води. Циліндр повільно нагрівають і поршень починає рухатись. Рух поршня припиняється після того, як він пройшов $\frac{1}{4}$ довжини циліндра. При цьому вода випарилася. Тиск водної пари змінювався з температурою за законом $P = 10^4(t°C - 100°C)$ Па.

Знайти масу сухого повітря M_0 та водної пари M, що були в циліндрі перед нагрівом, і, також, початкову температуру T_0 та температуру T_1 за якої поршень скінчив рух. Газова стала $R = 8,3$ Дж/(К моль), молярна масса водної пари $\mu_l = 18$ г/моль, молярна масса повітря – $\mu_a = 29$ г/моль. (8 балів)

Рішення задачі 3.

I) Застосуємо рівняння Менделеєва – Клайперона для обоїх частин циліндра

а) Початковий етап

$$P_0 V_0 = \alpha_a R T_0, \tag{18}$$

$$P_0 \left(V_0 - \frac{m}{\rho_l} \right) = \alpha_s R T_0, \tag{19}$$

де ρ_l – щильність води, $\alpha_a = \frac{M_0}{\mu_a}$, $\alpha_s = \frac{M}{\mu_l}$

З рівнянь (18) та (19) отримуємо

$$\alpha_s = \alpha_a \left(1 - \frac{m}{\rho_l V_0}\right). \tag{20}$$

Оскільки $\frac{m}{\rho_l V_0} \approx 4 \cdot 10^{-3} \ll 1$, то $\alpha_s \approx \alpha_a$.

b) Після нагрівання

$$P_1 V_1 = \alpha_a R T_1, \tag{21}$$

$$P_1 V_2 = (\alpha_s + \alpha_l) R T_1, \tag{22}$$

де $V_1 = \frac{1}{2} V_0$, $V_2 = \frac{3}{2} V_0$, $V_1 + V_2 = 2V_0$, $\alpha_l = \frac{m}{\mu_l}$.

З рівнянь (18), (19) та (21), (22) отримуємо

$$\alpha_a = \alpha_s, \quad \frac{\alpha_s + \alpha_l}{\alpha_a} = 3, \tag{23}$$

$$\alpha_l = 2\alpha_s, \quad M = \frac{1}{2} m = 2\,\text{gr}, \quad M_0 = M \frac{\mu_a}{\mu_l} = 3,22\,\text{gr}. \tag{24}$$

II) Для водної пари

$$P_0 = \alpha_a \frac{R T_0}{V_0} = 10^4 (T_0 - 373^\circ K), \tag{25}$$

$$P_1 = \alpha_a \frac{2 R T_1}{V_0} = 10^4 (T_1 - 373^\circ K). \tag{26}$$

Звідси $T_0 = 411^\circ K$, $T_1 = 458^\circ K$.

Задача 4.

Дві тонкі збиральні лінзи, оптичні сили яких відрізняються на 5/6 діоптрій, роташовано так, що їх головні вісі співпадають. Відстань між лінзами становить 20 см. Ця оптична система створює пряме уявне зображення предмета зі збільшенням 3. Якщо лінзи поміняти місцями, не змінюючи положення предмета, то теж отримують пряме уявне зображення предмета. Знайти збільшення в цьому випадку. (9 балів).

Рішення задачі 4.

Для розвязку задачі використовуємо формулу тонкої лінзи

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{27}$$

де

d – відстань від предмета до лінзи,

f – відстань від лінзи до зображення,

F – фокусна відстань лінзи, та

$D = \frac{1}{F}$ – оптична сила лінзи,

$K = \pm \frac{f}{d}$ – лінійне збільшення лінзи, де знак "–" для прямого зображення та знак "+" – для оберненого зображення. Зображення буде уявне коли f є від'ємною величиною.

Для першої лінзи з

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_1, \tag{28}$$

отримуємо

$$d_1 = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - D_1}, \tag{29}$$

або

$$f_1 = \frac{d_1}{D_1 d_1 - 1}. \tag{30}$$

Можна показати, що для всіх випадків: 1) $0 < f_1 < l$, 2) $f_1 > l$, 3) $f_1 < 0$,
де l - відстань між лінзами,
маємо $d_2 = l - f_1$. Звідси

$$d_2 = \frac{l(D_1 d_1 - 1) - d_1}{D_1 d_1 - 1}. \tag{31}$$

Для лінійного збільшення лінз маємо

$$K_1 = -\frac{f_1}{d_1} = -\frac{1}{D_1 d_1 - 1}, \quad K_2 = -\frac{f_2}{d_2} = -\frac{1}{D_2 d_2 - 1}.$$

Повне збільшення системи лінз

$$K = K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{(D_1 d_1 - 1)(D_2 d_2 - 1)} = \frac{1}{D_2 l(D_1 d_1 - 1) - (D_1 + D_2) d_1 - 1}. \tag{32}$$

Звідси маємо систему рівнянь

$$D_2 l(D_1 d_1 - 1) - (D_1 + D_2) d_1 - 1 = \frac{1}{3}, \tag{33}$$

$$D_1 l(D_2 d_1 - 1) - (D_1 + D_2) d_1 - 1 = \frac{1}{K'}. \tag{34}$$

Ця система дає рішення задачи

$$K' = \frac{1}{1/3 - l(D_1 - D_2)}, \tag{35}$$

$K' = 2$ або $K' = 6$.