Олимпиада КАУ

Задача 1. *Дано 100 гир різної ваги, та терези з трьома чашами, які за одне зважування будь-яких трьох гир виявляють найважчу та найлегшу серед них.*

1) За яку найменшу кількість зважувань можна знайти найважчу гирю?

2) Доведіть, що за 52 *зважування можна знайти дві найважчі гирі.*

3) Чи можна за 54 *зважування знайти три найважчі гирі?*

Задача 2. *На сторонах* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ *многокутника* $A_1A_2\ldots A_n$ *обрано відповідно такі точки* $B_1, B_2, \ldots, B_n$*, що* $\angle A_iB_iB_{i-1} = \angle A_{i+1}B_iB_{i+1}$ *для всіх* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(A_{n+1} = A_1, B_{n+1} = B_1)$*. Також на цих сторонах обрано такі точки* $C_1, C_2, \ldots, C_n$*, що* $B_1B_2 \parallel C_1C_2, B_2B_3 \parallel C_2C_3, \ldots, B_{n-1}B_n \parallel C_{n-1}C_n$*.*

1) Доведіть, що $B_nB_1 \nparallel C_nC_1$ *при* $n = 3$*.*

2) Доведіть, що $B_nB_1 \parallel C_nC_1$ *при* $n = 4$*.*

3) Для яких n *завжди виконується умова* $B_nB_1 \parallel C_nC_1$*?*

Задача 3. *Додатні числа* w, x, y, z *задовольняють рівності* $w^2 = w + 1$, $x^3 = x^2 + x + 1$, $y^4 = y^3 + y^2 + y + 1$, $z^5 = z^4 + z^3 + z^2 + 2$.

Визначте, яке з двох чисел більше:

1) w *чи* x*;*

2) x *чи* y*;*

3) y *чи* z*.*

Задача 4. *Нехай* $a = (5^{100})!$

1) На скільки нулів закінчуется a*?*

2) Знайдіть останню ненульову цифру a*;*

3) Знайдіть дві останні ненульові цифри a*.*

Задача 5. *Знайдіть усі такі натуральні числа* k*,* r*, що рівність*

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = (1 + 2 + \cdots + n)^r$$

виконуеться

1) для всіх натуральних n*;*

2) для всіх натуральних $n > 100$*.*

3) Знайдіть усі такі натуральні числа k*,* m*,* l*,* r*, що рівність*

$$(1^k + 2^k + \cdots + n^k)^m = (1^l + 2^l + \cdots + n^l)^r$$

виконується для нескінченної кількості натуральних n*.*

Розв'язки

Задача 1.

У першому пункті, з одного боку, неважко переконатися, що 50 зважувань достатньо: зважуємо по три гирі, щоразу відкидаючи по дві найлегші. З іншого боку, на кожному зважуванні кількість гир, які є потенційно найважчими, зменшується, як неважко бачити, щонайбільше на два. Оскільки спочатку в нас 100 потенційно найважчих гир, то для того, щоб визначити найважчу, тобто зменшити кількість потенційно найважчих гир до однієї, потрібно принаймні 50 зважувань.

Для другого пункту влаштуємо "турнір": одну гирю (назвемо її X) відкидаємо, а інші 99 розбиваємо на 33 групи по три гирі та зважуємо кожну групу. Після зважування розбиваємо "переможців" на 11 груп по три гирі і зважуємо, потім знову розбиваємо 11 переможців і X на чотири групи по три. Зваживши ці групи, отримаємо чотирьох кандидатів на "перше місце"; назвемо їх A, B, C, D. Зважимо A, B, C, а потім двох "переможців" і D. Це дасть інформацію, яка гиря найважча (позначимо її U), яка друга за вагою серед цих чотирьох (гиря V), та які дві гирі вже не претендують на друге місце (S, T). Одержимо чотирьох кандидатів на друге місце: V та три гирі W_1, W_2, W_3, які у попередніх зважуваннях з U "посіли друге місце". Зважимо W_1, W_2, W_3, визначимо найважчу та другу за вагою; нехай без обмеження загальності це W_1 і W_2 відповідно. Зваживши тепер V, W_1 та S, визначимо найважчу з гир серед V, W_1, W_2, W_3, яка й буде другою за вагою серед усіх; нехай це R.

У третьому пункті відповідь ствердна; перші 52 зважування проведемо так само, як у попередньому пункті. Кандидатами на третю позицію будуть не більше п'яти гир: гиря T, друга за вагою з останньої трійки (V, W_1, S) (позначимо її через P) та або (якщо $R = W_1$) не більше двох гир, що програли W_1 у перших двох раундах й W_2, або (при $R = V$) ті, що програли V у перших трьох раундах. За два зважування можемо знайти з цих гир них найважчу, вона й буде третьою за вагою серед усіх.

(**Слободянюк Сергій**)

Задача 2.

1) Усередині трикутника існує єдина трикутна траєкторія, така, що кут падіння рівний куту відбиття — це ортотрикутник (трикутник із вершинами в основах висот). Позначимо $\angle A_1B_1B_3 = \angle B_2B_1A_2 = \alpha, \angle A_2B_2B_1 = \angle B_3B_2A_3 = \beta$, $\angle A_3B_3B_2 = \angle B_1B_3A_1 = \gamma$. Тоді маємо $\angle B_3A_1B_1 = 180^\circ - \alpha - \gamma, \angle B_1A_2B_2 = 180^\circ - \alpha - \beta, \angle B_2A_3B_3 = 180 - \beta - \gamma$. Тоді $180^\circ = \angle B_3A_1B_1 + \angle B_1A_2B_2 + \angle B_2A_3B_3 = 3 \cdot 180^\circ - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Легко бачити, що α, β, γ — кути трикутника $A_1A_2A_3$. З рівності вписаних кутів чотирикутників $A_1B_1B_2A_3$ випливає, що точки B_i є основами висот. Отже, пряма B_3B_1 не може бути паралельною до C_3C_1, інакше було б дві такі траєкторії, про які йшлося на початку доведення, а це неможливо.

2) Легко довести, що відстані між паралельними прямими C_kC_{k+1} та B_kB_{k+1} зберігаються, бо ці відстані рівні висотам рівнобедренних трикутників з вершинами $C_kB_kD_k$, де D_k — перетин прямих C_kB_{k+1} та B_kC_{k+1}. Тоді після чотирьох відбиттів від сторін чотирикутника ми повернемося у вихідну точку , бо зміна положення відносно точок B_k буде зроблена парну кількість разів.

3) Позначимо $\angle B_{k+1}B_kA_{k+1} = \angle A_kB_kA_{k-1} = \alpha_k$, а також позначимо C_{n+1}, таку точку на стороні B_1B_2, що C_nC_{n+1} паралельно B_nB_1. З того, що прямі B_kB_{k+1} і C_kC_{k+1} паралельні та теореми синусів випливає, що $C_{k+1}A_{k+2} = A_{k+1}A_{k+2} - \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\alpha_{k+1})}C_kA_{k+1}$. Застосовуючи це рекурентне співвідношення, починаючи з C_1A_2 n раз, отримуємо рівність

$$C_{n+1}A_2 = A_1A_2 - \Big(A_nA_1 - \Big(A_{n-1}A_n - \Big(...\Big(A_2A_3 - C_1A_2\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}\Big)\frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)}\Big)...\frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\alpha_1)}$$

Звідси отримуємо наступну рівність

$$C_{n+1}A_2 = c + (-1)^n C_1A_2$$

де c константа, яка не залежить від C_1A_2. За умовою задачі питається, для яких n завжди має місце рівність $C_{n+1}A_2 = C_1A_2$. За умовою задачі якщо замість точок C_k поставити B_k, то ця рівність точно виконується. Для парного n, це означає, що $B_{n+1}A_2 = c + B_1A_2 \Rightarrow c = 0$. Отже, для парного n рівність $C_{n+1}A_2 = c + (-1)^n C_1A_2$ перетворюється просто в умову яку нам треба довести. У випадку коли n непарне, рівність приймає наступну форму $C_{n+1}A_2 = c - C_1A_2$, і якщо б $C_{n+1}A_2 = C_1A_2$ з чого випливає, що $C_{n+1}A_2 = C_1A_2 = \frac{c}{2}$ і тоді існує єдина така точка $_1$ яка задовільняє цій умові, в данному випадку це B_1, отже, для непарної кількості сторін умова $B_nB_1 \parallel C_nC_1$ виконується не завжди.

(**Юрашев Владислав**)

Задача 3.

Лема. Нехай $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – довільна послідовність невід'ємних чисел не всі члени якої рівні 0. Тоді існує єдине $x > 0$ таке, що $x^n = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ і для всіх $y > 0$:

$$y > x \Leftrightarrow y^n > a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1y + a_0.$$

Доведення леми випливає з монотонності та непервності функції $g(x) = 1 - \frac{a_{n-1}}{x} - \cdots - \frac{a_1}{x^{n-1}} - \frac{a_0}{x^n}$ й умови, що $g(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1) > 0 > g(\max\{a_i\}/2)$.

Тепер пункти задачі випливають з нерівностей:

1) $w^3 - w^2 - w - 1 = -1 \to w < x$

2) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = -1 \to x < y$

3) $y^5 - y^4 - y^3 - y^2 - 2 = y - 2$. Але $y < 2$ оскільки $2^4 > 2^3 + 2^2 + 2 + 1$, отже $y < z$.

(**Слободянюк Сергій**)

Задача 4.

За формулою Лежандра степінь простого числа p, що входить в розклад $n!$ дорівнює: $\sum_{k\geq 1}[\frac{n}{p^k}]$, що при $p = 5$ та $n = 5^{100}$ дає $b = \sum_{1\leq k\leq 100}\frac{5^{100}}{5^k} = \frac{5^{100}-1}{4}$. Оскільки степінь 2 ще вища (принаймні в два рази), то степінь десятки на яке ділиться a рівна $\frac{5^{100}-1}{4}$. Для розв'язання останнього пункту подамо множину чисел $\{1, 2, \ldots, 5^{100}\}$ як об'єднання множин

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, \ldots\} \cup \{5, 10, 15, 20, 30, 35, ...\} \cup \cdots \cup \{5^{100}\}$$

тобто розіб'ємо цю множину на групи за максимальною степінню 5 на яку діляться ці числа. Позначимо ці множини відповідно як $A_0, A_1, \ldots, A_{100}$. Тоді $a = \prod_{i=0}^{100}\prod_{k\in A_i} k$. Тоді число $c = \frac{a}{5^b}$ подається у вигляді

$$c = \prod_{i=0}^{100}\prod_{k\in A_i}\frac{k}{5^i} = \prod_{i=0}^{99}\prod_{m<5^{100-i}, 5\nmid m} m.$$

За модулем 25 усі 99 добутків крім останнього будуть степінями числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 24 \cong -1$ $(mod\ 25)$. Тобто за модулем 25 $c \cong 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1)^{\frac{5^{100}-5}{20}} \cong -1 \cdot -1 \cong 1$. Позначимо останні дві ненульові цифри числа a через двоцифрове число x. Тоді x ділиться на 4. Оскільки x рівний останнім двом цифрам числа $c/2^b$, то $x \cdot 2^b \cong 1$ $(mod\ 25)$. Але $b \cong 16$ $(mod 20)$, отже за теоремою Ейлера $2^b \cong 2^{16}$ $(mod\ 25)$, отже $x \cong 2^{20-16} = 16$ $mod(\ 25)$. Двоцифрове число, що ділиться на 4 і дає остачу 16 за модулем 25 це лише 16.

(Слободянюк Сергій)

Задача 5.

1) Підставимо в рівність $n = 2$, тоді маємо рівність $1 + 2^k = 3^r$. Для $k = 1$ маємо $r = 1$, очевидно, що це розв'язок. Якщо $k > 1$, тоді 3^r має залишок 1 при ділені на 4, з цього випливає, що r парне число. Покладемо $r = 2r_1$, тоді $3^{2r_1} = 2^k + 1 \Rightarrow (3^{r_1} - 1)(3^{r_1} + 1) = 2^k$. Отже, числа $3^{r_1} - 1$ і $3^{r_1} + 1$ є степенями двійки, їх різниця рівна 2, тому одне з них не може ділитися більше ніж один раз на двійку. Значить менше з цих чисел рівно 2. Маємо $3^{r_1} - 1 = 2 \Rightarrow r = 2r_1 = 2, k = 3$. Перевіримо, чи підходять ці числа для довільних n. Достатньо довести за індукцією, що $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ та $1^3 + 2^3 + ...n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Отже, є два розвязки $(1, 1)$ і $(3, 2)$.

2) Перепишемо рівність в іншій формі, скориставшись формулою для суми перших n чисел:

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^r$$

Для чисел $n > 100$ вірна наступна рівність

$$n^k = (1^k+2^k+\cdots+n^k)-(1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^r - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^r = \frac{n^r}{2^r}((n+1)^r-(n-1)^r).$$

Тобто маємо

$$2^r n^{k-r} = (n+1)^r - (n-1)^r$$

для всіх $n > 100$. Виходить, що $2^r n^{k-r} = \Sigma_{i=0}^{[\frac{r-1}{2}]} C_r^{n-2i+1} n^{r-2i+1}$. Ця рівність може виконуватись для нескінченної кількості n тільки якщо в правій частині не більше одного доданку. Тому $r < 3$, отже, може дорівнювати тільки 1 чи 2. З попереднього пункту ми вже знаємо, що тоді є тільки два розв'язки $(1, 1)$ та $(3, 2)$.

3) Позначимо $S_k(n) = 1^k + ... + n^k$. Спочатку треба довести, що $S_k(n)$ - це поліном степеня $k+1$ зі старшим коефіцієнтом $\frac{1}{k+1}$. Для цього позначимо $(x)_u = x(x-1)\dots(x-u+1)$. Оскільки кожен $(x)_u$ це поліном степіня u з старшим коефіцієнтом 1 то існує єдине подання x^k через суму x_u:

$$x_k = \sum_{u=0}^{k} a_u \cdot (x)_u,$$

де зокрема $a_k = 1$. Тоді:

$$\sum_{m=0}^{n} m^k = \sum_{m=0}^{n}\sum_{u=0}^{k} a_u \cdot (n)_u = \sum_{u=0}^{k} a_u \sum_{m=0}^{n} (m)_u = \sum_{u=0}^{k} a_u \cdot u! \sum_{m=0}^{n} C_m^u = \sum_{u=0}^{k} a_u \cdot u! C_{n+1}^{u+1} =$$

$$\sum_{u=0}^{k} \frac{a_u}{u+1}(n+1)_{u+1}.$$

Тобто поліном $\sum_{u=0}^{k}\frac{a_u}{u+1}(x+1)_{u+1}$ і є шуканим $S_k(x)$, зі старшим мономом $\frac{a_k}{k+1}x^{k+1} = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$.

Оскільки в обох частинах рівності стоять поліноми, які рівні для нескінченної кількості точок, тоді вони мають бути тотожньо рівні, як і старші мономи $\frac{1}{(k+1)^m}n^{(k+1)m}$ і $\frac{1}{(l+1)^r}n^{(l+1)r}$ поліномів $S_k(n)^m$ і $S_l(n)^r$ відповідно, отже, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases}(k+1)m = (l+1)r\\ (k+1)^m = (l+1)^r\end{cases}$$

У випадку $m = r$, маємо $k = l$, що очевидно є розв'язком. Якщо ж рівності нема, тоді будемо вважати, що $r > m$, а також поділимо їх на найбільший спільник знаменник, це нічого не змінить у рівності. Якщо піднести першу рівність системи до степеня m, і зробити заміну із другої рівності, тоді отримуємо

$$(l+1)^{r-m}m^m = r^m$$

Можемо вважати, оскільки ми на початку домовились розглядати взаємнопрості числа m і r, з останньої рівності випливає, що m ділить r, отже, дорівнює 1, інші числа рахуються однозначно, маємо $r = 2, l = 1, k = 3$. Оскільки ці значення вже перевірялись у попередніх пунктах, маємо, що розв'язками будуть всі четвірки виду $(k, m, l, r) = (3, t, 1, 2t)$, або $(k, m, l, r) = (1, t, 3, 2t)$, або $(k, m, l, r) = (t, x, t, x)$.

(**Тимошкевич Тарас**)

3) (розв'язок **Ніколаєва Арсенія**)

Оскільки многочлени зліва та справа збігаються, то при $n = 2$:

$$(1^k + 2^k)^m = (1^l + 2^l)^r.$$

Але тоді множини простих дільників чисел $1^k + 2^k$ та $1^l + 2^l$ однакові, що за теоремою Зігмонді ($https://en.wikipedia.org/wiki/Zsigmondy\%27s\_theorem$) можливо лише при $k = l$ чи при $\{k, l\} = \{1, 3\}$.