# Квазікласична асимптотика акцесорного параметру в рівняннях сімейства Гойна

Андрій Найдюк

Київський академічний університет
кафедра теоретичної та математичної фізики

Науковий керівник: Микола Іоргов
(Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
НАН України)

2020

# Мета досліджень

Метою досліджень магістерської роботи є вивчення поведінки акцесорного параметру рівняння Гойна і його вироджених випадків при малих та великих значеннях параметру взаємодії. А також їх зв‘язку з кореляційними функціями двовимірної квантової теорії поля з конформною симетрією.

# Рівняння Матьє

Рівняння Матьє - найбільш вироджене рівняння сімейства Гойна

$$-\partial_z^2 u + 2t \cos 2z \, u = \lambda u,$$

описує квантово-механічний рух у періодичному потенціалі.
$\lambda$ - енергія (акцесорний параметр), $t$ - константа звязку.

Розв‘язки мають властивість квазіперіодичності

$$u(z+\pi) = e^{2\pi i \nu} u(z),$$

де $\nu$ - квазіімпульс.
Досліджується теорія збурень для $\lambda(t)$ ($t \to 0$ та $t \to \infty$) при фіксованому $\nu$.

# Рівняння Гойна

Розглянемо диференціальне рівняння наступної форми

$$\left[\partial_z^2 + Q(z)\right]\psi(z) = 0,$$

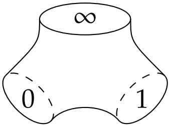
де $Q(z)$ - раціональна функція

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta_j}{(z-z_j)^2} - \frac{c_j}{z-z_j}\right), \quad z \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2 \ldots, z_n\},$$

де $c_j$ - акцесорні параметри.

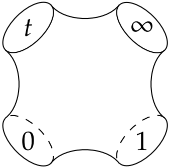
$n = 3$

Гіпергеометричне рівняння




$n = 4$

рівняння Гойна



# Квантова та класична задача

Ми можемо спостерігати гамільтонову структуру $\hat{\mathcal{H}}\psi = c_i\psi$

$$\begin{array}{c} z \to \hat{q} \\ \partial_z \to \hat{p} \end{array} \;\to \hat{\mathcal{H}}(\hat{p},\hat{q},t) = (\hat{q} - z_i)(\hat{p}^2 + \hat{Q}(\hat{q},t)|_{c_i=0}) \to \mathcal{L} = pq_t - \mathcal{H}(q_t,q,t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} = 0$$

- $\left| \begin{array}{c} \hat{\mathcal{H}}\psi = c_i\psi \\ c_i(\delta_j, t) \text{ -?} \end{array} \right.$

$\xrightarrow{n=3}$ $q$ експоненційна $\to$ $\psi$ Гіпергеометрична

$\xrightarrow{n=4}$ $q$ Пенлеве $\to$ $\psi$ Гойн

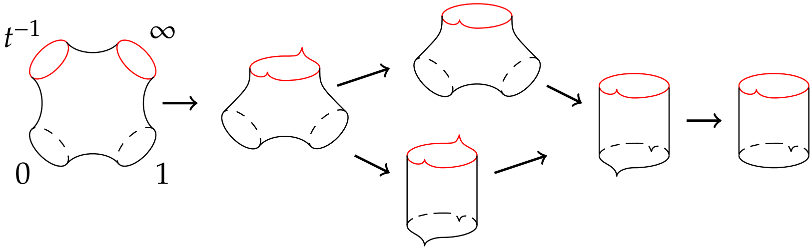
# Конфлюентні рівняння

Рівняння Гойна в канонічній формі:

$$\partial_z^2 u + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{\delta}{z-t}\right)\partial_z u + \frac{\alpha\beta z - \lambda}{z(z-1)(z-t)} u = 0.$$

При $t \to 0$ та $\beta \to \infty$ так, що $t\beta = \tilde{t}$, воно перетворюється в конфлюентне рівняння Гойна:

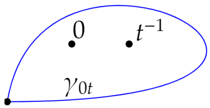
$$\partial_z^2 u + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} - \tilde{t}\right)\partial_z u - \frac{\alpha\tilde{t}z - \lambda}{z(z-1)} u = 0$$

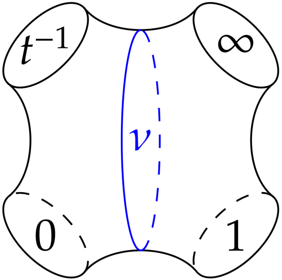


# Розклад по гіпергеометричним функціям

Зафіксуємо монодромію
навколо точок 0 і $t^{-1}$:

$$u(z|_{\gamma_{0t}}) = e^{2\pi i\nu} u(z)$$




Тоді можна розкласти $u(z)$ по гіпергеометричним функціям:

$$u(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j P_j(z) \quad , \qquad P_j(z) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\nu+\delta+\gamma-1}{2}+j, & \frac{-\nu+\delta+\gamma-1}{2}-j \\ \gamma \end{matrix}; z\right]$$

# Рекурентні співвідношення

Скористаємось рекурентними співвідношеннями для ${}_2F_1$ і отримаємо:

$$\mathcal{H}\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j P_j\right] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(K_{j-1}a_{j-1} + L_j a_j + M_{j+1}a_{j+1}\right) P_j$$

$$\mathcal{H}u = \lambda u \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & L_1 & K_0 & 0 & \\ & M_1 & L_0 & K_{-1} & \\ & 0 & M_0 & L_{-1} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \vdots \\ a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$K_j = R_{j+\nu/2},\ M_j = R_{-(j+\nu/2)},\ L_j = \frac{1}{4}\left((2j+\nu)^2 - (\gamma+\delta-1)^2\right) + R_{j+\nu/2} + R_{-(j+\nu/2)}$$

$$R_j = t\,\frac{(2j+1+2\alpha-\gamma-\delta)(2j+1+2\beta-\gamma-\delta)(2j+1+\gamma-\delta)(2j-1+\gamma+\delta)}{32j(2j+1)}$$

# Ланцюговий дріб

Тепер у нас є матричне рівняння

$$K_{j-1}a_{j-1} + \left(L_j - \lambda\right)a_j + M_{j+1}a_{j+1} = 0.$$

Умова існування нетривіального розв‘язку,

$$\det\left[\mathcal{H} - \lambda\right] = 0,$$

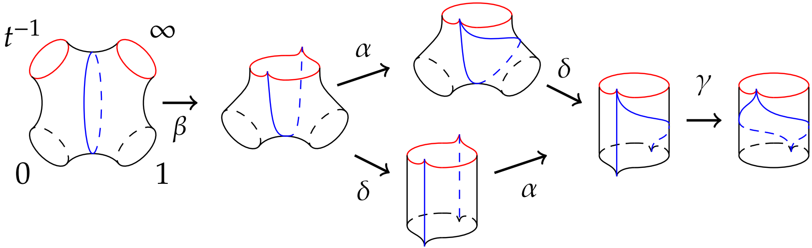
записується у вигляді рівняння з ланцюговими дробами:

$$\cfrac{M_0K_{-1}}{\cfrac{M_{-1}K_{-2}}{\cfrac{M_{-2}K_{-3}}{\ldots + (\lambda - L_{-3})} + (\lambda - L_{-2})} + (\lambda - L_{-1})} + (\lambda - L_0) + \cfrac{M_1K_0}{(\lambda - L_1) + \cfrac{M_2K_1}{(\lambda - L_2) + \cfrac{M_3K_2}{(\lambda - L_3) + \ldots}}} = 0$$

У випадку рівняння Гойна $\lambda$ має форму:

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\gamma^2 + 2\gamma(\delta - 1) + \delta^2 - 2\delta - \nu^2 + 1\right) +$$
$$+ \frac{\left(-2\alpha(\gamma - \delta)\left(\gamma^2 + 2(\delta - 1)\gamma + \delta^2 - \nu^2 - 2\delta + 1\right) + \ldots + 4\alpha\beta\left(\gamma^2 - 2\gamma - \delta^2 + \nu^2 + 2\delta - 1\right)\right)}{8\left(\nu^2 - 1\right)}t +$$
$$+ \frac{\cdots}{128\left(\nu^2 - 4\right)\left(\nu^2 - 1\right)^3}t^2 + O\left(t^3\right)$$

# Ланцюговий дріб




$$R_j = t\frac{(2j+1+2\alpha-\gamma-\delta)(2j+1+2\beta-\gamma-\delta)(2j+1+\gamma-\delta)(2j-1+\gamma+\delta)}{32j(2j+1)}$$

# Зв'язок з ВКБ

Розв'язок рівняння Гойна можна представити у формі квазікласичного (ВКБ) розкладу

$$u(z) = \exp i\sqrt{t}\int_{z_0}^{z} P(\zeta)d\zeta \quad \Longrightarrow \quad 2\pi i \nu = i\sqrt{t}\oint_{\gamma_{0t}} P(\zeta)d\zeta,$$

де

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(z)t^{-i/2}.$$

У випадку рівняння Матьє (найбільш вироджений випадок на діаграмі)

$$\frac{\hbar^2}{2}\partial_z^2 u + (w - \cos 2z)u = 0,$$

де $\hbar^2 = \frac{1}{t}$, $w = \frac{\lambda}{2t}$

$$\oint_A P_0(z)dz = \oint_A \sqrt{2(w - \cos 2z)}dz = \pi\sqrt{2(w+1)}F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{2}{w+1}\right)$$

# Великий та малий параметр

Можемо представити

$$\oint_{A,B} P(z)dz = \mathcal{D}_w \oint_{A,B} P_0(z)dz,$$

де $\mathcal{D}_w$ - певний диференціальний оператор.
Замінимо еліптичний інтеграл першого роду на еліптичний інтеграл другого роду:

$$\oint_B P_0(z)dz = \frac{i\pi}{2}(w-1)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{1-w}{2}\right).$$

Це дає розклад для великого $t$:

$$\lambda_\infty = 2t - 4\nu\sqrt{t} + \frac{4\nu^2 - 1}{2^3} + \frac{4\nu^3 - 3\nu}{2^6\sqrt{t}} + \frac{80\nu^4 - 136\nu^2 + 9}{2^{12}t} + \dots$$

# Рівняння з одним додатковим параметром

Рівняння, що передує рівнянню Матьє на діаграмі виродження:

$$(z\partial_z)^2 u + ((c+1)z+1)\,\partial_z u - (tz-\lambda)\,u = 0.$$

У цьому випадку перше наближення ВКБ має вигляд

$$\oint_A P_0(z)dz = \sqrt{w} - \frac{c}{4w^{3/2}} - \frac{15(c-1)(c+1)}{64w^{7/2}} - \frac{105(c-2)c(c+2)}{256w^{11/2}} + \\ - \frac{15015(c-3)(c-1)(c+1)(c+3)}{16384w^{15/2}} + o(w^{-15/2})$$

Або, виразивши через гіпергеометричну функцію, отримуємо

$$= \sqrt{w}\ {}_6F_3\left[\begin{matrix} -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1-c}{2}, \frac{1+c}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \end{matrix}; -\left(\frac{8}{w}\right)^2\right] - \frac{c}{4\sqrt{w^3}}\ {}_6F_3\left[\begin{matrix} \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{9}{8}, \frac{2-c}{2}, \frac{2+c}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \end{matrix}; -\left(\frac{8}{w}\right)^2\right]$$

# Висновки

- В даній роботі було побудовано відповідність між певними кореляційними функціями двовимірної конформної теорії поля (класичними конформними блоками) та акцесорними параметрами рівнянь сімейства Гойна у випадку малої константи взаємодії.
- Випадок сильної взаємодії потребує детальнішого розгляду, оскільки присутні деякі проблеми з ренормалізацією константи взаємодії. Тим не менш, загальна картина виглядає багатообіцяючою. Зв‘язок великого і малого параметру через ВКБ також виявляється важливим з точки зору деяких сучасних областей математики та фізики (точний ВКБ, wall crossing, квантові інтегровні системи).

Дякую за увагу!