

**ПРОГРАМА**  
**вступного іспиту до магістратури Кафедри математики**  
**Київського академічного університету**  
**спеціальність 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології**

**1. Теоретична частина**

**Алгебра та геометрія**

1. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Властивості розв'язків. Фундаментальна система розв'язків.
2. Арифметичний векторний простір. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Критерій лінійної залежності системи векторів.
3. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Властивості власних векторів. Знаходження власних векторів та власних значень лінійного оператора.

**Математичний аналіз**

1. Екстремуми функції однієї змінної. Необхідна та достатня умови екстремуму функції для однієї змінної (доведення).
2. Первісна та невизначений інтеграл. Методи інтегрування функції.
3. Тригонометрична система функцій. Розклад функції в ряд Фур'є. Розклад функції в ряд Фур'є для парних та непарних функцій.

**Диференціальні рівняння**

1. Однорідні диференціальні рівняння та рівняння, що до них зводяться.
2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
3. Основні властивості однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.
4. Визначник Вронського та фундаментальна система розв'язків.
5. Знаходження фундаментальної системи розв'язків для однорідної лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

**Теорія ймовірностей**

1. Аксиоми теорії ймовірностей та властивості ймовірності.
2. Умовна ймовірність. Незалежність випадкових подій.
3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса (доведення).
4. Функція розподілу та щільність розподілу випадкових величин.
5. Математичне сподівання та дисперсія. Властивості.
6. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.

**Програмування**

1. Основні елементи мови C++ (або *Pascal* на вибір): вбудовані типи, визначення та ініціалізація змінних, область їх видимості, правила вибору імен змінних, літерали (константи), операції та вирази – арифметичні, логічні, відношення, побітові оператори. Приклади арифметичних операцій в мові C++ (або *Pascal* на вибір).

2. Основні керуючі конструкції мови. Розгалуження та оператор `switch`. Приклади використання. Основні інструкції керування – цикли `for` та `while`. Правила структурування коду програми.
3. Основні інструкції керування – цикл `do-while` (або `repeat-until` на вибір). Використання інструкцій `break`, `continue`, `return` (або аналогічне в *Pascal* на вибір).
4. Файли. Текстові файли. Компонентні файли. Безтипові файли.
5. Масиви в мові C++ (або *Pascal* на вибір). Створення масиву. Ініціалізація та використання масивів. Багатовимірні масиви. Функції і масиви. Функції, які працюють з діапазонами масивів.
6. Функції і об'єкти класу *string*. Обробка символічних та строкових даних в C++ (або *Pascal* на вибір). Робота з рядками в мові C++ (або *Pascal* на вибір). Використання керуючих символів при виводі рядків. Масиви рядків.
7. Структуризація даних. Структури, класи, масиви.
8. Структуризація програм: підпрограми, виклики підпрограм. Простори імен.
9. Зображення чисел та інших значень у комп'ютері. Основні скалярні типи даних: значення, операції, вирази.
10. Оператори. Оператор присвоювання, структурні оператори. Область дії оголошення імені. Засоби введення-виведення.
11. Процедурне програмування: процедури, функції та правила їх написання. Способи передачі параметрів в процедури та функції. Рекурсивні функції та їх особливості.
12. принципи об'єктно-орієнтованого програмування (інкапсуляція, наслідування, поліморфізм, абстракція). Поняття класу: властивості та методи класу, модифікатори доступу, конструктори, деструктори, перевизначення операцій. Реалізація принципів наслідування та поліморфізму в реалізації класів.

### **Проектування інформаційних систем**

1. Процеси життєвого циклу обробки програмного забезпечення.
2. Діаграма класів UML. Класи, сутності, відношення. Інтерфейси та абстрактні класи.
3. Діаграми реалізації, стану, діяльності та послідовності UML.

### **Представлення даних. Обробка та методи збереження інформації**

1. Представлення символів, цілих чисел і дробів, двійкових та шістнадцяткових подань
2. Двійкове арифметичне додавання, віднімання, множення, ділення
3. Проста арифметика та два арифметичні доповнення, числа із плаваючою точкою, булева алгебра, таблиці правди, діаграми Венна.
4. Сортування масиву (`quicksort`, `Bubble sort`, `Bucket sort`).
5. Модельовання. Опис об'єкта реального життя або процесу з точки зору інформації. Типи описів: схеми, таблиці, графіки та формули.
6. Числові системи. Позиційні системи. Бінарне представлення інформації. Переклад між десятковими і двійковими поданням. Арифметичні операції у двійковій системі.
7. Логіка та алгоритми. Пропозиції, логічні операції, квантори, значення істинності пропозиції. Поняття алгоритму. Умовні оператори та цикли. Впровадження та побудова основних алгоритмів у математичних та реальних проблемах.
8. Що таке процес нормалізації, визначте нормальні форми.
9. Що таке обмеження цілісності, визначте обмеження цілісності.
10. Визначте реляційні операції.

## Аналіз даних, статистика

1. Генеральна сукупність, вибірка. Вибіркове середнє, вибіркова дисперсія. Гістограма.
2. Точкові оцінки параметрів розподілу. Консистентність, незміщеність. Приклади. Метод максимальної правдоподібності. Метод моментів.
3. Довірчі інтервали. Побудова довірчих інтервалів для параметрів гауссового розподілу. Побудова асимптотичного довірчого інтервалу для невідомого середнього за допомогою центральної граничної теореми.
4. Перевірка статистичних гіпотез. Помилки першого та другого роду, потужність критерію. Перевірка гіпотез про параметри гауссового розподілу. Критерій хі-квадрат. Перевірка гіпотези про середнє для великих вибірок.
5. Розподіл частот, середнє значення, медіана, мода, стандартні відхилення, кореляція, прості завдання про ймовірність.

## Обчислювальні методи

1. Надати визначення абсолютної та відносної похибки. Теорема про абсолютну похибку алгебраїчної суми наближених чисел. Правило складання чисел різної абсолютної точності.
2. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь: метод Гауса, метод квадратних коренів. Поняття про ітераційні методи для систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Загальна постановка задачі інтерполяції. Постановка задачі інтерполяції багаточленами. Записати інтерполяційний багаточлен Лагранжа.
4. Навести інтерполяційний багаточлен Ньютона з поділеними різницями. У чому полягає перевага при застосуванні інтерполяційного багаточлена Ньютона у порівнянні з формулою Лагранжа? Навести вираз для залишкового члена інтерполяційного багаточлена Ньютона.
5. Надати визначення скінченних різниць. Показати зв'язок між скінченними різницями різного вигляду. Як визначити скінченну різницю через значення функції, заданої таблицею?
6. Яку формулу називають емпіричною? Метод найменших квадратів. Екстраполяція на основі методу найменших квадратів. За яких умов МНК надає некоректні результати?
7. Постановка задачі чисельного інтегрування. Навести, яка квадратурна формула називається інтерполяційною. Формула Ньютона-Котеса.
8. Який геометричний сенс формули Сімпсона? Записати повну формулу Сімпсона. Від чого може залежати точність квадратурних формул?
9. Чисельні методи розв'язування задачі Коші. Метод Ейлера.
10. Чисельні методи розв'язування задачі Коші. Методи Рунге-Кутта. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

## Алгоритми та структури даних

1. Основні моделі алгоритмів.
2. Абстрактний тип даних «Список» та «Стек».
3. Абстрактний тип даних «Черги» та «Відображення».
4. Дерева, як структури даних.
5. Бінарні дерева пошуку, визначення, основні операції.
6. Множини, підходи до реалізації, основні операції.
7. Хеш-функції. Хеш-таблиці.
8. Графи як структури даних. Різні форми представлення орієнтованих графів.

## 2. Практична частина іспиту

### Алгебра та геометрія

1. Знайти рівняння проєкцій прямої  $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$  на площину  $2x+3y-z-5=0$ .
2. Дано дві вершини паралелограма  $ABCD$ :  $C(-2, 3, 5)$  і  $D(0, 4, -7)$  та точка перетину діагоналей  $M(1, 2, 3)$ . Скласти рівняння сторони  $AB$ .
3. Знайти деякий базис системи векторів. Всі вектори системи, які не належать цьому базису, виразити через вектори базису:  $a_1=(1; 2; 3; -4)$ ;  $a_2=(2; 3; -4; 1)$ ;  $a_3=(2; -5; 8; -3)$ ;  $a_4=(5; 26; -9; -12)$ ;  $a_5=(3; -4; 1; 2)$ .
4. Дослідити сумісність системи і, у випадку сумісності, знайти її загальний розв'язок. Виконати перевірку правильності знайденого розв'язку:

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$$

5. Розв'язати матричне рівняння. Виконати перевірку правильності розв'язку:

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

### Математичний аналіз

1. Яке значення функції  $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ,  $x \neq 0$  треба задати в точці  $x = 0$  ( $f(0)$ ), щоб ця функція була неперервною в цій точці?
2. Написання рівняння дотичної до кривої  $f(x) = \sin^2 x$  в точці  $x = 0$ .
3. Знайти екстремум функції  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ .
4. Знайти інтеграл  $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x \cos x}$ .
5. Обчислити площу, обмежену кривими  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$ .
6. Знайти радіус збіжності та область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$ .
7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = R$  ( $R > 0$ ).

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(x) = x^2$  відрізка  $[-\pi, \pi]$  і за допомогою цього розкладу обчислити суму числового  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

### Диференціальні рівняння

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші:  $y' - y/x = x^2$ ,  $y(1) = 0$ .

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

4. Знайти розв'язок задачі Коші:  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y(\pi/4) = 1/2$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \frac{y}{x} + 3.$$

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

### Теорія ймовірностей

1. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Ймовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребують: 1) три верстати; 2) від двох до п'яти верстатів; 3) принаймні один верстат. Вважати, що різні верстати-автомати працюють незалежно.

2. Троє студентів незалежно складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе іспит становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85 і 0,8. Знайти розподіл випадкової величини  $X$  – числа студентів, які складуть іспит. Знайти математичне сподівання та дисперсію  $X$ .

3. Щільність розподілу випадкової величини  $X$  дорівнює  $p(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

Знайдіть математичне сподівання та дисперсію  $X$ .

4. В квадраті  $ABCD$  зі стороною 3 випадковим чином обрали точку. Знайти ймовірність того, що відстань до цієї точки:

- a) до центру квадрату;

- б) до сторони АВ;  
не перевищує 1.
5. Сигнал передається ТУ №1 з ймовірністю 0,4 та ТУ №2 з ймовірністю 0,6. Ймовірність вірної передачі сигналу ТУ №1 дорівнює 0,95, ТУ №2 – 0,9. Знайти ймовірність того, що сигнал буде передано вірно.  
Знайти ймовірність того, що сигнал було передано ТУ №1, якщо відомо, що його було передано вірно.
6. Випадкові величини  $\xi_1, \dots, \xi_n$  незалежні та мають розподіл  $P(\xi_k = 0) = 0.2$ ,  $P(\xi_k = 2) = 0.5$ ,  $P(\xi_k = -1) = 0.3$ . Знайти  $M \xi_k$ ,  $D \xi_k$ ,  $M (\xi_1 + \dots + \xi_n)$ ,  $D (\xi_1 + \dots + \xi_n)$ ,  $M \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right)$ ,  $D \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right)$ .
7. Вага курча має нормальний розподіл. Середня вага курча дорівнює 900 г, середнє квадратичне відхилення ваги дорівнює 50 г.
- Обчислити ймовірність того, що вага 400 курчат більше 362 кг.
  - Знайти таке число  $M$ , що ймовірність того, що вага 400 курчат менше  $M$ , дорівнює 0,01.
  - Знайти кількість курчат, що забезпечують загальну вагу 1000 кг. З ймовірністю 0,98.

### Програмування

Написати програму для вирішення наступної задачі:

- Обчислити  $y = \begin{cases} (a+b)/2, a \geq b \\ \sqrt{a*b}, a < b \end{cases}$
- Обчислити площу трикутника по формулі Герона з перевіркою сторін на існування трикутника
- Задано масив з 10 елементів, напишіть програму, яка б задані елементи розташовувала в порядку зростання.
- Напишіть програму, яка запрошує користувача вводити числа. Після кожного введеного значення програма повинна видавати накопичену суму введених значень. Програма повинна завершуватися при введенні 0.
- Напишіть програму для обчислення середнього віку студентів вашої групи.
- Напишіть програму «Секундомір», яка б при виведенні слова Start ви водили 0 і програма автоматично додавала би по одній секунді до ти поки не добігало би значення 90с.
- Введіть речення з клавіатури та визначте:
  - кількість елементів – «літер» (усіх);
  - кількість голосних;
  - кількість приголосних;
- Задано 10 елементів. Знайти числа, які кратні 3.
- Задана матриця другого порядку. Написати програму «транспонування матриці» (тобто рядки стали стовпчиками а стовпчики рядками).

## Аналіз даних

1. Знайдіть вибіркоче середнє та вибіркочу дисперсію для вибірки:  
2.8, 11.3, 0.7, 11.6, 5.6.
2. Знайдіть вибіркоче середнє та вибіркочу дисперсію вибірки  $x_1, \dots, x_{100}$ , якщо  $x_1 + \dots + x_{100} = 74$ ,  $(x_1)^2 + \dots + (x_{100})^2 = 12500$ .
3. Дискретна випадкова величина  $X$  має розподіл

$$P(X=-1) = P(X=0) = \alpha, P(X=1) = 1-2\alpha, \text{ де } 0 < \alpha < 1/2.$$

По вибірці  $X_1, \dots, X_n$  побудуйте незміщену консистентну оцінку для  $\alpha$ .

4. Нехай  $X_1, \dots, X_n$  – вибірка з

а) показникового розподілу з параметром  $\alpha > 0$ , б) пуассонового розподілу з параметром  $\alpha > 0$ .

Знайти оцінку максимальної правдоподібності для параметра  $\alpha$ . Чи буде ця оцінка консистентною?

5. Вибірка містить 400 спостережень, вибіркоче середнє дорівнює 1.2, вибіркоча дисперсія дорівнює 4. Побудуйте асимптотичний довірчий інтервал для невідомого середнього з рівнем довіри 0.95.

6. Вибірка містить 100 спостережень, вибіркоче середнє дорівнює 1.1, вибіркоча дисперсія дорівнює 9. Перевірте нульову гіпотезу про те, що математичне сподівання  $m=1$  проти альтернативної гіпотези  $m>1$ . За рівень значущості взяти 0.05.

7. Нехай  $X_1, \dots, X_n$  – вибірка з нормального розподілу. Перевірте гіпотезу  $H_0: E X=2$  проти альтернативної гіпотези  $H_a: E X>2$  з рівнем значущості 0.05, якщо  $n=16$ , вибіркоче середнє дорівнює 1.9, вибіркоча дисперсія дорівнює 1.