

Семинар 9. Метод математической индукции.
10.11.2018

1. Докажите тождество: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
3. Докажите тождество: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Докажите тождество: $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$.
5. Докажите тождество: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.
6. Докажите неравенство: $2^n > n$.
7. Докажите неравенство для натуральных $n > 1$: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.
8. Доказать, что $4^n - 3n - 1$ делится на 9 для любого натурального n .
9. (*Игра "Ханойская башня"*) Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что
 - а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;
 - б) это можно сделать за $2^n - 1$ перекладывание.
10. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.
11. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что
 - а) эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседние области – это области, имеющие общий участок границы.)
 - б) Докажите аналогичную задачу, но вместе с прямыми рассматриваются окружности.
12. На плоскости даны N прямых общего положения. Найти число частей, на которые они делят эту плоскость.
13. Докажите, что число $111\dots111$ (3^n единиц) делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} .
14. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ существует такое натуральное число N , которое равно сумме n своих разных делителей.
15. Для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n дробей, числители которых равны 1, а знаменатели – попарно различны.
16. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n - натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и прибавим их все. Какое число мы получим?