Семинар 8. Инварианты.
03.11.2018

Четность

1. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

2. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

3. Лягушка прыгает вдоль прямой. Сначала она прыгнула на 1 см, затем на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем на 5 см в том же или в другом направлении и т. д. Могло ли случиться так, что она оказалась в исходной точке после 2019-го своего прыжка?

4. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2017. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать разность. Можно ли добиться того, чтобы все числа были нулями?

5. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

6. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

7. Александр написал на доске в некотором порядке 2016 плюса и 2017 минусов. Время от времени Григорий подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причем если он стер одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

8. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

9. На доске написано 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят, либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

10. Учитель написал на доске все натуральные числа от 1 до 100. Раз в минуту кто-то из школьников подходит к доске, вытирает какие-то два из написанных на ней чисел и записывает наименьший общий простой делитель их суммы. Через 99 минут на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Другие модули

11. Хулиганы Вася и Петя порвали стенгазету, причём Петя рвал каждый кусок на 4 части, а Вася на 10. При попытке собрать стенгазету нашли 2018 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.

12. Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 2017?

13. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно перезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

Сумма

14. Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$. В начале имеется набор чисел 2016, 2017, 2018. Может ли через некоторое время получиться набор 2017, 2018, 2019.

15. На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке - по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке?

16. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

17. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

Разность

18. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: *A*, *B* и *C*. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа *A* было 20 штук, типа *B* - 21 штука и типа *C* - 22 штуки?

19. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Другое

20. На квадратном поле 10*10 девять клеток 1*1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Для удовольствия

1. Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

2. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a + 1$ и $b + 1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 1988)?

3. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $\left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ из тройки $\left(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$?