Семінар 6. Арифметика залишків.
20.10.2018

Означення: числа a і b рівні (конгруентні) за модулем m ($a \equiv b \ (mod\ m)$), якщо $a - b$ ділиться на m, тобто існує таке ціле число c, що $a - b = cm$.

1. Доведіть за означенням: якщо $a \equiv b \ (mod\ m), c \equiv d \ (mod\ m)$, тоді
а) $a \pm c \equiv b \pm d \ (mod\ m)$ б) $ak \equiv bk \ (mod\ m)$ в) $ac \equiv bd \ (mod\ m)$ г) $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$.

2. Доведіть властивості конгруенцій за модулем:

- якщо конгруенція вірна за модулем m, тоді вона вірна і за модулем n, рівному будь-якому натуральному дільнику числа m;
- якщо конгруенція вірне по декількох модулям, то воно вірне по модулю, рівному найменшому спільному кратному даних модулів;
- обидві частини конгруенції можна розділити на їх спільний дільник, взаємно простий з модулем.

3. Доведіть, що a) $7^{2018} - 1$ ділиться на 6; b) $5^{2019} + 1$ ділиться на 6;

4. Доведіть, що $2^{100} \equiv 3^{100}$ за модулями $5, 13, 211$;

5. Доведіть, що $a^n - b^n$ ділиться на $a - b$ за допомогою конгруенцій.

6. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $(2^n - 1)^n - 3$ ділиться на $2^n - 3$.

7. Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 + a_1 + \dots + +a_n (mod\ 9)$.

8. Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n (mod\ 11)$.

9. Доведіть, що ділиться на 10 числа: а) $53^{53} - 33^{33}$; б) $7^{1968^{1970}} - 3^{4^{70}}$.

10. Розв’яжіть конгруенцію: (треба пошайтанити)
a) $11x \equiv 5 \ (mod\ 7)$ b) $42x \equiv 33 (mod\ 90)$; c) $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 (mod\ 35)$.

11. Відомо, що $a^{100} \equiv 2 (mod\ 73)$ і $a^{101} \equiv 69 (mod\ 73)$. Знайдіть залишок від ділення числа a на 73.

12. Розв’яжіть в натуральних числах рівняння $2^x + 7^y = 19^z$.

13. Доведіть, що якщо довжини сторін прямокутного трикутника виражаються цілими числами, тоді добуток довжин катетів ділиться на 12.

14. Доведіть, що серед чисел від 1 до 100 кількість таких чисел n, що n^2+1 ділиться на 101, парна.

15. Доведіть: a) $11^{10} - 1$ ділиться на 100;
b) якщо $a \equiv b \ (mod\ m)$, то $a^m \equiv b^m \ (mod\ m^2)$.

Для задоволення

16. При ділені натурального числа n на 3 і на 37 маємо, відповідно, залишки 1 і 33. Знайдіть залишок від ділення n на 111.

17. Для яких чисел a розв’язком конгруенції $ax \equiv 1 (mod\ p)$ буде саме число a?

18. Нехай p - просте число, і a не ділиться на p. Доведіть, що знайдеться натуральне число b, для якого $ab \equiv 1 (mod\, p)$.

19. Теорема Вільсона. Доведіть, що конгруенція $(p - 1)! \equiv -1 (mod\, p)$ виконується тоді і тільки тоді коли p - просте число.

20. Розв'яжіть конгруенцію:
a) $92x \equiv 8 (mod\, 164)$; b) $x^2 - 7x \equiv 67 (mod\, 77)$.