

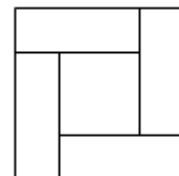
Семинар 5. Принцип крайнего 2.
13.10.2018

Расстояние.

1. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

2. Существует ли тетраэдр, каждое ребро которого являлось бы стороной плоского тупого угла?

3. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырёх прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата. Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.



4. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

5. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на её продолжении.

6. Из каждой вершины многоугольника опущены перпендикуляры на стороны, её не содержащие. Докажите, что хотя бы для одной вершины одно из оснований перпендикуляров лежит на самой стороне, а не на её продолжении.

7. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой – либо другой из проведённых хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

8. Имеется 100 точек на плоскости, причём расстояние между любыми двумя из них не превосходит 1, и если A, B, C — любые три точки из данных, то треугольник ABC — тупоугольный. Доказать, что можно провести такую окружность радиуса $1/2$, что все данные точки лежат внутри неё или на ней самой.

9. На плоскости дано конечное число точек, причем любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой (Сильвестр).

Расположение

1. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что найдется ладья, бьющая не более двух других?

2. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задевая остальных.

3. а) Незнайка отметил несколько точек на прямой. Он утверждает, что каждая отмеченная точка является серединой отрезка, соединяющего какие-то две отмеченные точки. Докажите, что Незнайка где-то что-то не досмотрел. б) Незнайка отметил еще несколько точек вне прямой и уверяет, что теперь точно каждая отмеченная точка является серединой отрезка, соединяющего какие-то две отмеченные точки. Докажите, что Незнайка ошибается.

4. На прямой дано конечное количество отрезков, таких, что любые два имеют общую точку. Докажите, что тогда все эти отрезки имеют общую точку (Теорема Хелли).

Разное.

1. Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

2. На плоскости расположено n точек, причем площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

3. На плоскости дано $n \geq 3$ точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

Для удовольствия

4. На плоскости задано конечное множество точек. Доказать, что в нём найдётся точка, у которой имеется не более трёх ближайших к ней точек из этого же множества.

5. На плоскости дано конечное число попарно непараллельных прямых, причем через точку пересечения любых двух из них проходит еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

6. Существует ли на плоскости конечный набор различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ такой, что для любой пары различных векторов из этого набора найдётся такая другая пара из этого набора, что суммы каждой из пар равны между собой?

7. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трех). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.