

**Семінар 3. Принцип крайнього.**  
**29.09.2018**

1. У нас є 100 паличок, викладені по зростанню довжин. За яку кількість перевірок можна точно визначити, з будь-яких трьох паличок можна зробити трикутник?
2. В школі провели змагання по перетягуванню канату, усіх учасників занесли в список по зменшенню сили. Вчитель фізкультури замислився: чи вірно, що будь-які троє перетягнуть будь-яких двох? За яке мінімальне число перетягувань він зможе це дізнатися?
3. Сім дійсних чисел такі, що сума будь-яких трьох з них менше суми чотирьох, що залишились. Доведіть, що всі числа додатні.
4. Сім грибників зібрали разом 100 грибів, причому кожний зібрав різну кількість. Доведіть, що якісь три грибника зібрали разом не менше 50 грибів.
5. У геолога є шалькові терези без гир і 8 камінців. Він хоче знати, чи вірно, що два камінця завжди важче одного. Як йому гарантовано перевірити це а) за 19 зважувань; б) за 13 зважувань?
6. На дошці було написано 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали наступні 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа були написані?
7. По колу розставлено декілька натуральних чисел так, що кожне з них є дільником одного з сусідніх. Доведіть, що серед цих чисел є два рівних.
8. По колу вписано 10 чисел, кожне з яких рівне половині суми двох сусідніх. Скільки серед них може бути різних чисел?
9. В кожній клітинці нескінченної клітчастої дошки записано натуральне число. При цьому виявилось, що кожне число рівне одній четвертій суми чотирьох сусідніх по стороні чисел. Доведіть, що усі числа рівні між собою.
10. На настінному годиннику у підсобці математиків нанесено 12 чисел; кожне рівне модулю різниці двох наступних (за годинниковою стрілкою) за ним. Серед них є число 1. Які числа нанесено на годинник?

11. Знайти усі додатні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

12. Доведіть, що не існує попарно різних натуральних чисел  $x, y, z, t$ , для яких було б справедлива рівність  $x^x + y^y = z^z + t^t$ .

**13.** Чи існують такі різні натуральні числа  $a$  і  $b$ , що  $a^2 + 2b + 1$  і  $b^2 + 2a + 1$  є точними квадратами?

**14.** Доведіть, що числа від 1 до 16 можна записати в строку, але не можна записати по колу так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел була квадратом натурального числа.

**15.** На конгрес зібрались вчені, серед яких є друзі. Виявилось, що кожні два з них, які мають на конгресі рівне число друзів, не мають спільних друзів. Доведіть, що знайдеться вчений, який має рівно одного друга з числа учасників конгресу.

**16.** На полях шахівниці розставлені числа 1, 2, ..., 64. Доведіть, що знайдеться пара сусідніх по стороні клітинок, де числа відрізняються не менше, ніж на 5.

**17.** Дана таблиця  $n \times n$ , в кожній клітинці записано число, причому усі числа різні. В кожній строчці відмітили найменше число, і всі відмічені числа виявились в різних стовпчиках. Потім в кожному стовпчику відмітили найменше число, і всі відмічені числа опинились в різних строчках. Доведіть, що обидва рази відмітили одні і ті самі числа.

**18.** Доведіть, що в нескінченній послідовності попарно різних натуральних чисел, більших одиниці, знайдеться нескінченна кількість чисел, які більше свого номера в цій послідовності.