

Семинар 27. Вписанные углы.
25.05.2019

1. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности этого треугольника.
2. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH . Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.
3. На хорде AB окружности S с центром в точке O взята точка C . D — вторая точка пересечения окружности S с окружностью, описанной около треугольника ACO . Докажите, что $CD = CB$.
4. Две окружности пересекаются в точках M и K . Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C , вторую в точках B и D . Докажите, что $AC \parallel BD$.
5. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точке A . Прямая O_1A пересекает окружность S_2 в точке K_2 , а прямая O_2A пересекает окружность S_1 в точке K_1 . Докажите, что $\angle O_1O_2A = \angle K_1K_2A$.
6. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
7. В круге провели три хорды AB , BC , CD и отметили их середины M , N и K соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$ или $\angle BMN + \angle NKC = 180$.
8. Теорема о «трилистнике». Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M . Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Докажите, что треугольники MBI и MCI — равнобедренные.
9. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причём центр O окружности S_2 лежит на окружности S_1 . Хорда OC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D . Докажите, что D — точка пересечения биссектрис треугольника ABC .
10. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции точек A и B на эту прямую, P — середина стороны AB . Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.
11. Продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 .
12. Две окружности пересекаются в точках M и N . На дуге первой окружности, расположенной вне второй окружности, взята точка A . Продолжения хорд AM и AN первой окружности пересекают вторую окружность в точках B и C . Докажите, что длина отрезка BC не зависит от положения точки A на указанной дуге.
13. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

- 14.** AL — биссектриса треугольника ABC , K — такая точка на стороне AC , что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P . Докажите, что $AP = PL$.
- 15.** Дан треугольник ABC . Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найдите угол ACB .
- 16.** Даны две точки и окружность. С помощью циркуля и линейки проведите через данные точки две секущие, хорды которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α .
- 17.** Неравенство Эрдёша. Точка P , лежащая на большей из двух дуг AB окружности, соединена с серединой M меньшей дуги AB . Хорды PL и PM пересекают хорду AB соответственно в её середине K и в некоторой точке N . Сравните отрезки KL и MN .
- 18.** Даны окружность, две точки P и Q этой окружности и прямая. Найдите на окружности такую точку M , чтобы прямые MP и MQ отсекали на данной прямой отрезок AB данной величины.
- 19.** Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причём центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2 . Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D . Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны.
- 20.** Три прямые проходят через точку O и образуют попарно углы в 60° . Из произвольной точки M , отличной от O , опущены перпендикуляры на эти прямые. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами правильного треугольника.
- 21.** Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что четыре проекции точки пересечения диагоналей на стороны четырёхугольника лежат на одной окружности.
- 22.** В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
- 23.** Центр O описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ не лежит на диагоналях этого четырёхугольника. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC — в точке F .
- а)* Докажите, что все шесть описанных окружностей треугольников ABF , CDF , BEC , ADE , BOD и AOC пересекаются в некоторой точке K .
- б)* Верно ли, что точка K лежит на прямой EF , а прямые EF и OK перпендикулярны?
- 24.** Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности (окружность девяти точек). Где расположен центр этой окружности?