

**Семінар 26. Принцип зациклювання.  
18.05.2019**

**Принцип зациклювання.** Якщо система може знаходитись лише в скінченій кількості станів, і кожний наступний стан однозначно визначається за попереднім, то система з деякого моменту зациклиться.

1. В поліклініці сто кабінетів, а працює тільки один лікар. На кожній із дверей поліклініки висить табличка «Лікар в кабінеті № ...». Лікар і правда сидить в одному із кабінетів. Відвідувач поліклініки починає шукати лікаря з першого кабінету, керуючись табличками. Обов'язково ли: а) відвідувач знайде лікаря; б) повернеться к першому кабінету; в) побуває в кабінеті, в якому вже був; г) рано або пізно почне ходити по колу; д) знайде лікаря, якщо всі таблички різні; е) повернеться к першому кабінету, якщо всі таблички різні?

2. а) Петя написав на дошці двозначне число. Після цього він помножив його в голові на 23 і написав останні дві цифри результату. Потім він знову помножив результат на 23 і написав 2 останні цифри, і т.д. Доведіть, що послідовність записуваних чисел зациклиться.

3. Якою цифрою закінчується число  $2^{2019}$ ?

4. Знайдіть 2016-ту цифру після коми в десятковому розкладі дробу  $\frac{1}{14}$ .

5. В послідовності 20013486... кожна цифра, починаючи з п'ятої, дорівнює останній цифрі суми чотирьох попередніх цифр. Довести, що в цій послідовності знову зустрінеться вся четвірка 2001.

**Принцип зациклювання назад (обернений хід).** Якщо в умовах принципу зациклювання кожний попередній стан однозначно відновлюється по фіксованому числу послідувачих, то система зациклиться без передперіоду.

6. а) Нескільки вершин кінцевого графа з'єднані стрілками. Відомо, що з кожної вершини виходить рівно одна стрілка. Доведіть, що в цьому графі є цикл (т.е. можна, починаючи з деякої вершини, пройти по стрілкам і повернутися в цю вершину).

б) Відомо також, що в кожну вершину входить рівно одна стрілка. Доведіть, що граф складається з одного або кількох непересекаючихся циклів.

7. Відновлено, що погода на Сиріусі в даний день повністю визначається попереднім тижнем. Варіанти погоди: магнітна буря, метеоритний дощ, штиль. Останній тиждень йшов метеоритний дощ. Доведіть, що тижні "дощу" завжди були та будуть.

**8.** В последовательности цифр 1, 1, 4, 6, 1, 1, 8, 0, 9, ... каждая цифра, начиная с четвертой, равна последней цифре суммы трех предыдущих.

**а)** Докажите, что какая-нибудь комбинация из трех цифр в этой последовательности встретится бесконечное число раз.

**б)** Докажите, что можно найти повторяющуюся комбинацию среди первых 1003 цифр этой последовательности.

**в)** Встретятся ли в этой последовательности еще раз цифры 1, 1, 4, идущие подряд?

**г)** Встретятся ли цифры 1, 8, 2, идущие подряд?

**д)** Встретятся ли цифры 2, 7, 4, идущие подряд?

**9.** Кожне наступне число в послідовності цілих чисел одержується з попереднього так: число підноситься до квадрату, і з нього викреслюється всі цифри, крім останніх чотирьох. Доведіть, що послідовність періодична, і довжина періоду не більше 10000.

**10.** На доске написано трехзначное число. Каждую минуту считают сумму квадратов цифр числа на доске и записывают ее вместо самого числа. Докажите, что последовательность чисел, появляющихся на доске, заиклится.

**11.** Доведіть, що в послідовності Фібоначчі є член з номером, більшим 1000, який дає остачу 5 при діленні на 2019.

**12.** Кубик Рубик виведено з первісного стану деякою комбінацією поворотів. Доведіть, що завжди можна повернути його в первісний стан, виконавши цю комбінацію ще декілька раз.

**13. а)** По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

**б)** Обязательно ли повторится начальное расположение шариков, если раскладывать шарики начиная не со следующей, а с текущей коробочки?

**14.** На доске написано простое число  $p$ . Каждую минуту его изменяют: умножают на 2 и прибавляют 3. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

**15.** Дана бесконечная последовательность цифр. Известно, что количество различных подпоследовательностей из 15 цифр равно количеству различных подпоследовательностей из 16 цифр. Докажите, что эта последовательность цифр периодична.

**16.** Наступний член послідовності натуральних чисел дорівнює останній цифрі добутку двох попередніх. Доведіть, що послідовність а) періодична; б) довжини менше 17.

**17.** Доведіть, що рівняння не мають розв'язків в натуральних числах  $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ ;

## Для удовольствия

1. В стране Топляндии дорог много, а тупиков и вовсе нет. Рыцарь едет по этой стране, поворачивая на развилках а) на самую левую б) то на самую левую, то на самую правую дорогу. Докажите, что когда-нибудь он вернется в начало пути.
2. Последовательность натуральных чисел задана рекуррентным співвідношенням  $a_{n+1} = s(a_n)^2 + 1$ , где  $s$  – сума цифр. Доведіть, що ця послідовність періодична.
3. Доведіть, що  $\sqrt{2}$  – ірраціональне число.
4. Доведіть, що рівняння не мають розв'язків в натуральних числах: а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ; б)  $3^n = x^2 + y^2$ .
5. У новорічну ніч на підвіконні стояли у ряд (зліва направо) герань, крокус та кактус. Щоранку Маша, витираючи пил, міняє місцями квітку справа з квіткою в центрі. Вдень Таня, поливаючи квіти, міняє між собою ту, що в центрі, з тією, що зліва. У якому порядку будуть стояти квіти через 365 днів, тобто наступної новорічної ночі?
6. Яку остачу при діленні на 7 дає число  $4^{395}$  ?
7. В селищі Кентаврії є 1000 хатинок, в кожній з яких живе по одному єдиноріжку. В один чудовий день кожен переїжджає з своєї хатинки в якусь іншу. Після переїзду в кожній хатинці живе рівно один жилаць. Доведіть, що можна так пофарбувати всі хатинки в три кольори, щоб у кожного хазяїна колір нової хатинки відрізнявся від кольору старого.
8. В алфавите людоедского племени 10 букв: А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я. Людоедские шпионы обмениваются зашифрованными сообщениями. Алгоритм шифрования заменяет каждую из 10 людоедских букв на какую-то другую букву, причём разные заменяются на разные.
  - а) Докажите, что после нескольких применений этого алгоритма мы вернёмся к исходному тексту.
  - б) Мы не знаем правило замены, но у нас есть зашифрованный текст и программа, реализующая алгоритм шифрования. Программу можно запускать любое число раз. Какое наименьшее число раз нужно запустить эту программу, чтобы наверняка прочитать расшифрованное сообщение?
  - в) Слово АИУЭО после однократного применения алгоритма шифрования превратилось в ЁЭИОЯ. Может ли оно после еще нескольких применений этого же алгоритма превратиться в слово АУЮИЭ? Если может, то через сколько (укажите все варианты)?