

Семинар 23. Дискретная непрерывность

1. К числу можно за ход либо прибавить 1, либо отнять 8. Из 1 получили 100. Докажите, что когда-то было число 17.
2. Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, ..., начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на $3/2$ и округлением в меньшую сторону. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.
3. В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначное, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, которое начинается цифрами 2016.
4. Учитель выписал на доске несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше, чем на 1. Самое маленькое из выписанных чисел равно -5 , самое большое 100,25. Докажите, что одно из выписанных чисел отличается от нуля не больше, чем на 0,5.
5. Докажите, что в шестицифровом числе цифры можно переставить таким образом, что разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась в промежутке от 0 до 9.
6. За круглым столом сидит четное количество учителей. Каждый принял по несколько задач у учеников, причем у каждого двух, что сидят рядом, количество принятых задач отличается не больше чем на 1. Докажите, что найдется пара учителей, что сидят напротив друг друга, количество принятых задач которых отличается не больше чем на 1.
7. На педагогическом совете 30 учителей выстроились в ряд перед директором, причем женщин и мужчин поровну. Докажите, что есть 10 учителей, стоящих рядом, среди которых мужчин и женщин поровну.
8. Ожерелье сделано из 14 красных и 14 синих бусин. Докажите, что найдутся десять идущих подряд бусин, среди которых поровну синих и красных.
9. На плоскости дано 100 точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по 50 точек данного набора.
10. На плоскости дана 101 точка. Обязательно ли найдется прямая, которая проходит ровно через одну из данных точек, а по обе стороны от ее лежат по 50 точек из данного набора?
11. Двое сладкоежек хотят разделить поровну 2016 килограмма халвы. Проблема в том, что халва им досталась разломленная на 2016 различных кусочка. Какое наименьшее число кусков надо будет разрезать, чтобы можно было провести дележку?
12. В ряд выложено 100 черных и 100 белых шаров, причем самый левый и самый правый шары – черные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, что среди них количество белых равно количеству черных.
13. Докажите, что можно выбрать 100 последовательных натуральных чисел, среди которых будет ровно 5 простых числа.

14. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100 . Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25 .

15. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

Для удовольствия

1. В посёлок ежедневно приходит не менее двух писем и не более трёх телеграмм. За январь прошлого года писем пришло больше, чем телеграмм, а за весь прошлый год в целом — наоборот. Докажите, что в прошлом году был день, в который количества писем и телеграмм, пришедших в поселок с начала года, совпадали.

2. Два кота делят огромную цепочку из 100 свиных и 200 говяжьих сосисок, причем разделить ее так, чтобы каждому досталось ровно по половине сосисок каждого вида. Какое минимальное число разрезов надо сделать для этого?

3. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?