

## Семінар 22. Плоскі графи. Формула Ойлера. 23.03.2019

**Означення:** Граф називається плоским або планарним, якщо його можна намалювати на площині так, щоб його ребра не перетинались.

1. Намалюйте правильний планарний граф, вершини якого відповідають вершинам куба, а ребра — ребрам куба.
2. Доведіть, що в дереві є вершина, з якої виходить рівно одне ребро (*така вершина називається **висячою***).
3. Доведіть, що в дереві кількість вершин  $V$  на 1 більша кількості ребер  $P$ . ( $V - P = 1$ ).
4. На площині зображений планарний граф, який не є деревом. Доведіть, що якщо при видаленні деякого ребра граф залишається зв'язним, то кількість областей, на які ділять площину його ребра, зменшиться на 1.
5. Доведіть, що для довільного зв'язного планарного графа справедлива формула  $V - P + G = 2$  ( $G$  — кількість граней).
6. Наведіть приклад графа, для якого не виконується формула Ойлера:
  - а) плоского не зв'язного графа;
  - б) зв'язного графа.
7. В країні Озерна 7 озер, з'єднаних між собою 10 каналами, і від довільного озера можна доплисти до довільного іншого. Скільки в цій країні островів?
8. Доведіть, що для планарного графа у якого не менше 2 ребра, справедлива нерівність  $2P \geq 3G$ .
9. Доведіть, що для планарного графа у якого не менше 2 ребра справедлива нерівність  $P \leq 3V - 6$ .
10. Доведіть, що на площині неможливо намалювати повний граф з п'ятьма вершинами і ребрами, що попарно не перетинаються.
11. Чи можна десять міст з'єднати один з одним дорогами, що не перетинаються, так, щоб з кожного міста виходило по 5 доріг, які ведуть в п'ять інших міст?
12. Доведіть, що у довільному планарному графі існує вершина степені не більше п'яти.
13. а) Жителі трьох будинків, у спільному володінні яких знаходяться три колодязя, пересварились один з одним і вирішили прокласти до своєї власності неперетинні доріжки — від кожного будинку до кожного колодязю. Доведіть, що це їм не вдасться.  
б) Утомившись від сперечань, три сусіда переселилися на планету в формі бублика. Тут в їх власності також було три колодці. Чи зможуть сусіди вирішити на бублику задачу, яку не вирішили на землі?
14. Кожне ребро повного графа з 11 вершинами пофарбовано в один з двох кольорів: червоний або синій. Доведіть, що або «червоний», або «синій» граф (або і той, та інший) не є планарним.

**15.** (Завдання для біологів) Один з багатоклітинних організмів — водорість "вольвокс" — являє собою сферичну оболонку, складену семикутними, шестикутними та п'ятикутними клітинами (в кожній "вершині" сходяться три клітини). Біологи помітили, що п'ятикутних клітин завжди рівно на 12 більше, ніж семикутних (всього клітин може бути декілька сотень і навіть тисяч). Чи можете ви пояснити цей дивний факт?

**16.** В квадраті відмітили 20 точок і з'єднали їх неперетинними відрізками один з одним і вершинами квадрата так, що квадрат розділився на трикутники. Скільки одержали трикутників?

**17.** Яку найбільшу кількість клітинок дошки  $9 \times 9$  можна розрізати по обом діагоналям, щоб при цьому дошка не розпалася на декілька частин?

### Для задоволення

**18.** Грані деякого многогранника розфарбовані в два кольори так, що сусідні грані мають різні кольори. Відомо, що всі грані, крім одної, мають число ребер, кратне 3. Доведіть, що і ця одна грань має кратне 3 число ребер.

**19.** Доведіть, що в дводольному пласкому графі  $P \geq 2G$ , якщо  $P \geq 2$ .

**20.** Доведіть, що в довільному планарному графі є або грань не більше, ніж з трьома ребрами, або вершина, з якої виходить не більше, ніж три ребра.

**21.** Семикутник розбито на випуклі п'яти- і шестикутники, причому так, що кожна його вершина була вершиною як мінімум двох многокутників розбиття. Доведіть, що число п'ятикутників розбиття не менше 13.