

Семинар 21. Признаки делимости на 3 и 9.
15.03.2019

1. Запишите несколько раз подряд число 2018 так, чтобы получившееся число делилось на 9.
2. Известно, что $35! = 10333147966386144929 * 66651337523200000000$ (через $n!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n). Найдите цифру, замененную звездочкой.
3. Число $\overline{42X4Y}$ делится на 72. Найдите его цифры X и Y .
4. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.
5. Сумму цифр числа a обозначим через $S(a)$. Доказать, что если $S(a) = S(2a)$, то число a делится на 9.
6. Может ли число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть точным квадратом?
7. Числа 1, 2, 3, ..., 2018 возводятся в квадрат и записываются подряд в некотором порядке. Может ли полученное многозначное число быть полным квадратом?
8. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?
9. Пусть M — произвольное 2019-значное число, делящееся на 9. Сумму цифр этого числа обозначим через A . Сумму цифр числа A обозначим через B . Сумму цифр числа B обозначим через C . Чему равно число C ?
10. Известно, что в десятичной записи числа 229 все цифры различны. Есть ли среди них цифра 0?
11. Учитель задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?
12. Рассматриваются тройки целых чисел a, b и c , для которых выполнено условие:
 $a + b + c = 0$. Для каждой такой тройки вычисляется число
 $d = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019}$.
- а) Может ли случиться, что $d = 2$?
- б) Может ли случиться, что d — простое число?
13. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?
14. Имеются семь жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

15. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

16. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

17. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2020 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2021 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.