Семинар 20. Метод математической индукции 2.
09.03.2019

1. Утверждение: Через любые n точек на плоскости можно провести прямую.
Доказательство: При $n = 1$ и $n = 2$ теорема справедлива (в силу известной аксиомы геометрии). Остается доказать теорему для n, больших, чем 2. Допустим, что теорема справедлива при некотором $n = k$, и покажем, что в этом случае она будет сохранять силу и при некотором $n = k + 1$. Итак, пусть произвольно заданы $(k + 1)$ точек $M_1, M_2, \dots, M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции через k точек $M_1, M_2, \dots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \dots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'. Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M_2 и M_k. Но две точки определяют единственную прямую. Поэтому прямые l и l' должны совпадать. Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \dots, M_k$, проходит и через M_{k+1}. Утверждение доказано.

2. Известно, что $x + 1/x$ – целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ – также целое при любом целом n.

3. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

4. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geq 6$.

5. Докажите неравенство Коши $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

6. Доказать равенство $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots = n$.

7. Докажите, что $2^{m+n-2} \geq mn$ при любых натуральных m и n.

8. На ступенях нарисованы стрелки. На одной из них стоит человек. Он идет со ступени в тот бок, куда направлена стрелка, после чего стрелка на прошлой ступени разворачивается в противоположную сторону. Докажите, что когда-то человек уйдет с лестницы.

9. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k – 4$ разговора все они могут узнать все новости.

10. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строчки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках можно сделать так, что в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

11. На кольцевой дороге, по которой катается байкер, расположены 2019 бензоколонок. Общего количество бензина на всех заправках хватает, чтобы проехать по всему кольцу. Докажите, что есть место на дороге, начиная с которого байкер сможет проехать по всему кольцу.

12. Правда ли, что для любого натурального n можно выбрать n таких натуральных чисел, что никакое не является точным квадратом и никакая сумма не будет точным квадратом.

13. Некоторые n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n.

Для удовольствия

14. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи (каждая вершина считается покрашенной). Проводим несколько диагоналей многоугольника. Каждая из этих диагоналей покрашена с одной стороны. (То есть с одной стороны отрезка проведена узкая цветная полоска). Докажите, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи.

15. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось не менее 10 отмеченных?

16. В квадратной таблицы $n \times n$ отмечена $n-1$ клетка. Докажите, что перестановка столбцов и строк может «загнать» их ниже главной диагонали.