

Семінар 2. Правило добутку.
22.09.2018

1. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей тризубів і решок можна при цьому отримати?
2. Потяг, в якому знаходиться m пасажирів, має зробити n зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажери на цих зупинках?
3. Скількома способами можна поставити 8 тур на шахівницю так, щоб вони не били один одного?
4. Автобусні квитки мають шестизначних номери, від 000000 до 999999.
 - а) Скільки всього різних номерів? Номерів, усі цифри яких непарні?
 - б) Скільки номерів, в яких нема непарних цифр?
 - в) Скільки номерів, в яких будь-які дві сусідні цифри різні?
 - г) Скільки номерів, всі цифри яких різні?
 - д) Скільки номерів, всі цифри яких мають однакову парність?
 - е) Скільки номерів, у яких є хоч одна непарна цифра?
 - ж) Скільки номерів, містять цифру 7?
 - з) Скільки існує шестизначних чисел, які не містять цифр 7 і 0?
 - и) Скільки номерів, які містять цифру 7 і не містять цифри 0?
5. Скільки десятицифрових чисел, в яких всі цифри різні, і при цьому цифри 4 і 5 стоять поруч?
6. Скільки існує десятицифрових чисел, в записі яких мається хоча б дві однакові цифри?
7. У випуклому 2019-кутнику проведені всі діагоналі. Пряма перетинає 2019-кутник, але не проходить через його вершини. Доведіть, що пряма перетинає парну кількість діагоналей.
8. Скількома способами можна прочитати слово "строка", рухаючись вправо або вниз?:

С	Т	Р	О	К	А
Т	Р	О	К	А	
Р	О	К	А		
О	К	А			
К	А				
А					
9. На колі відмітили десять точок. Скільки існує незамкнутих несамоперетинних ламаних з дев'ятьма ланками з вершинами в цих точках?
10. Скількома способами можна розставити числа 1,2... 20 в строку так, щоб кожне число, крім одиниці, було більше як мінімум одного з своїх сусідів?
11. Тура стоїть на лівому полі клітчастої смужки 1×30 і за хід може посунутись на будь-яку кількість клітинок вправо. Скількома способами вона може добратися до крайнього правого поля?
12. Скільки підмножин у множини з n елементів?
13. Є 4 гири і терези з двома шальками без стрілки. Скільки усього різних по вазі вантажів можна точно зважити цими гирями, якщо
 - а) гири можна класти тільки на одну шальку терезів;
 - б) гири можна класти на обидві шальки терезів?

14. Маємо множину S , яка складається з n елементів. Скількома способами можна вибрати в S дві підмножини A і B так, щоб

а) множина A містилась в множині B ; б) множини A і B не перетинались?

15. Нехай $\tau(n)$ – кількість додатних дільників натурального числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Доведіть рівність $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_s + 1)$;

16. Яких чисел більше серед натуральних чисел від 1 до 1000000 включно: які представляються у вигляді суми точного квадрата і точного куба чи таких, що не представляються у такому вигляді?

17. Розглянемо лист клітчастого паперу зі стороною клітинки, рівною 1. Нехай P_k – число усіх неперетинних ламаних довжини k , які починаються в точці O – деякому фіксованому вузлі сітки. Доведіть, що $P_k \cdot 3^{-k} < 2$ для будь-якого k .

18. На всіх клітинках шахівниці розставлені натуральні числа. Дозволяється виділити будь-який квадрат розміром 3×3 або 4×4 і збільшити всі числа в ньому на 1. Ми хочемо в результаті декількох таких операцій досягти того, щоб числа у всіх клітинках ділились на 10. Чи завжди це вдасться зробити?

Для задоволення

19. Скількома способами можна пофарбувати п'ять ялинок в сріблястий, зелений і синій кольори, якщо кількість фарби необмежена, а кожен ялинок він фарбує тільки в один колір?

20. а) Знайдіть суму усіх трьохзначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4 (цифри можуть повторюватись).

б) Знайдіть суму усіх семизначних чисел, які можна отримати усіма можливими перестановками цифр 1, ..., 7.

21. В США дату прийнято записувати так: номер місяця, потім номер дня і рік. В Україні спочатку йде число, потім місяць і рік. Скільки в році днів, дату яких неможна прочитати однозначно, не знаючи, яким способом вона написана?

22. На полиці стоять 5 книг. Скількома способами можна викласти в стопку декілька з них (стопка може складатись з однієї книги)?

23. Для гри в шляпу джедай хоче розрізати своїм лазерним мечем лист паперу на 48 однакових прямокутників. Яку найменшу кількість розрізів йому треба зробити, якщо будь-які шматки паперу можна перекладати, але не можна згинати, а джедай здатний різати одночасно скільки завгодно шарів паперу? (Кожний розріз – пряма лінія від краю до краю шматка.)

24. Світлове табло складається з декількох ламп, кожна з яких може знаходитись в двох станах (горить або не горить). На пульті декілька кнопок, при натисканні кожної з яких одночасно міняється стан деякого набору ламп (для кожної кнопки – свого). На початку лампи не горять.

а) Доведіть, що число різних узорів, які можна отримати на табло, – степінь двійки.

б) Скільки різних узорів можна отримати на табло, яке складається з mn лампочок, розташованих в формі прямокутника розміром $m \times n$, якщо кнопками можна переключити як будь-який горизонтальний, так і будь-який вертикальний ряд ламп?