

Семинар 19. Принцип Дирихле 2.
02.03.2019

1. Докажите, что никакая прямая не может пересечь все три стороны треугольника (в точках, отличных от вершин).
2. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15° .
3. Докажите, что в любом девятиугольнике найдется пара диагоналей, угол между которыми меньше 7 градусов.
4. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1 , не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными).
5. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 расположено 7 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки на расстоянии не больше 1.
6. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.
7. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.
8. На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.
9. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.
10. Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.
11. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола, до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.
12. Ковёр имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.
13. В квадрате со стороной 1 расположено 100 фигур, суммарная площадь которых больше 99. Докажите, что в квадрате найдется точка, принадлежащая всем этим фигурам.
14. На плоскости дано 25 точек, причем среди любых трех из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Докажите, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 13 из этих точек.
15. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырёхугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь него попадут обе выбранные точки.