Семинар 18. Принцип Дирихле.
15.02.2019

Самая популярная формулировка принципа Дирихле такова: «Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца»

1. На Земле живёт 7 миллиардов человек. У каждого на голове не более 140000 волос. Докажите, что: есть два человека (a) с одинаковым количеством волос на голове; (b) с одинаковым количеством волос на голове, у которых дни рождения в один день.

2. Пятнадцать друзей при встрече начали здороваться за руку. Докажите, что в каждый момент некоторые двое сделали поровну рукопожатий.

3. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число $1, 2$ или 3. Могут ли сумы чисел во всех строках, столбцах и больших диагоналях быть разными?

4. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольных работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

5. К празднику украсили 50 воздушных шариков шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 шариков разного цвета.

6. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

7. На карьере добыли 36 камней. Их веса соответственно 490кг, 495кг, 500кг, …, 665кг (арифметическая прогрессия). Можно ли увезти эти камни на семи трехтонных грузовиках?

8. Доска 6 x 6 заполнена доминошками 1 x 2. Докажите, что можно провести горизонтальный или вертикальный разрез доски, не пересекающий ни одной костяшки.

9. Доказать, что из любых n+1 целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.

10. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2019.

11. Доказать, что среди чисел вида 111…11 есть число, которые делится на 2019.

12. Доказать, что для любых натуральных a, b, c, d можно найти такие коэффициенты α, β, γ, $\delta \in \{0, 1, -1\}$, не все равные 0, что $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ делится на 11.

13. В ряд выписано n натуральных чисел. Докажите, что найдётся несколько подряд идущих, сумма которых делится на n.

14. Доказать, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два числа, сумма или разность которых делится на 100.

15. На отрезке [0, 1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d. Докажите, что найдётся такая точка x, принадлежащая [0, 1], что $\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|} + \frac{1}{|x-c|} + \frac{1}{|x-d|} < 40$.

16. (Одномерная теорема Кронекера). Если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то множество $\{n\alpha\}$ плотно на отрезке [0, 1]. (через $\{x\}$ обозначается дробная часть числа x)