

## Семинар 15. Ориентированные графы 26.01.2019

**Определение:** *Ориентированным графом (или орграфом) называется граф, в котором каждое ребро имеет направление. Направленное ребро называется дугой, вершины, которые оно соединяет, называются началом и концом дуги.*

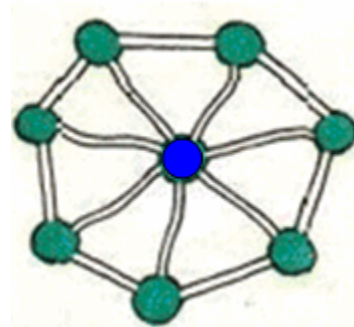
1. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.
2. В поселке 20 жительниц. 1 марта одна из них узнала интересную новость и сообщила ее всем своим подругам. 2 марта те сообщили новость всем своим подругам, и так далее. Может ли так случиться, что:
  - а) 15 марта еще не все жительницы будут знать новость, а 18 марта уже все?
  - б) 25 марта еще не все жительницы будут знать новость, а 28 марта уже все?
3. Физик, приехав из Врунландии, рассказал, что там есть несколько озер, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.
4. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.
5. В Империи ЦЫ все дороги с односторонним движением. В Империи есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, а входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
6. Докажите, что на рёбрах любого связного графа можно так расставить стрелки, что из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.
7. В Империи ЦЫ после Великой дорожной реформы некоторые города соединены между собой дорогами так, что покинув город, в него нельзя больше вернуться. Докажите, что есть город, а) из которого не выходит ни одной дороги; б) в который не входит ни одной дороги.
8. В Империи ЦЫ после проведения Новой дорожной реформы из каждого города выходит столько же дорог, сколько в него приходит, и из каждого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно объехать все города, проезжая по каждой дороге ровно по одному разу.
9. Император ЦЫ назначил нового министра путей сообщения, казнив прежнего, и теперь каждый город соединён с каждым Торговой дорогой с односторонним движением. Докажите, что в Империи ЦЫ существует (не обязательно замкнутый) Великий Шёлковый Путь, проходящий по разу через все города.
10. Футбольный турнир, проходивший по круговой системе, оказался на редкость бескомпромиссным: не было зафиксировано ни одного ничейного результата. По итогам турнира, команды «Физики» и «Математики» набрали одинаковое количество очков. Докажите, что а) найдутся команды  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , такие, что  $A_1$  выиграла у  $A_2$ ,  $A_2$  выиграла у  $A_3$ , ..., а  $A_n$  выиграла у  $A_1$ . б) Найдите минимальное  $n$ , для которого всегда выполняется условие пункта а).

**11.** После Очередной дорожной реформы каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.

**12.** В Империи ЦЫ из каждого города в любой другой можно добраться транзитом не более чем через один город. Одну из дорог закрыли на ремонт так, что по-прежнему можно из каждого города добраться в любой другой. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более чем через два города.

**13.** а) Между некоторыми парами городов проведена ровно одна дорога. Докажите, что можно ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него больше нельзя было вернуться. б) Найдите количество способов это сделать, если каждый город соединен с каждым.

**14.** В городе одна синяя площадь и  $n$  зелёных, причём каждая зелёная площадь соединена улицами с синей и с двумя зелёными, как показано на рисунке. На каждой из  $2n$  улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно проехать и с каждой – уехать. Докажите, что с каждой площади этого города можно, не нарушая правил, доехать до любой из остальных.



#### Для удовольствия

**1.** Каждый из 450 кентавров Государственной Конюшни ударил ровно одного из своих коллег. Докажите, что можно выбрать 150 кентавров, среди которых никто никого не бил.

**2.** В пруд выпустили 40 голодных щук. Щука называется сытой, если она съела трех других щук. Съеденная сытая щука по-прежнему считается сытой. Какое максимальное число щук может насытиться?