

**Семинар 14. Шары и перегородки.
10.01.2019**

1. Для проведения вступительной олимпиады преподаватели разбивают 65 школьников следующим образом: список в алфавитном порядке разбиваются на 4 части, первая идет в первую аудиторию, вторая – во вторую и так далее. При этом в каждую аудиторию отправляется хотя бы один школьник. Сколькими способами можно выполнить разделение?

2. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

3. В ряд стоят 5 ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам одиннадцать одинаковых шариков, чтобы ни один ящик не оказался пустым?



4. В ряду стоят 6 ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 10 одинаковых шариков, если разрешается, чтобы ящики оставались пустыми?



5. Сколько решений имеет уравнение $x+y+z+t=11$ в натуральных числах?
а) в натуральных; б) в целых неотрицательных числах?

6. За булочками в столовой выстроилась очередь из 15 людей. Тут прибежало 4 мальчика и они влезли в некоторые промежутки между ними, кто уже стоял в очереди? Сколько различных очередей могло образоваться, если: а) ни в один промежуток не влезло больше одного человека; б) в промежуток могли влезть и больше одного человека?

7. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.
а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках? б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

8. Сколькими способами можно разложить 9 орехов по трем карманам? (Карманы разные, а орехи одинаковые.)

9. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

10. Сколькими способами можно разрезать бусы из 30 разных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

11. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

12. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

13. Сколько решений уравнения $x+y+z=100$ в натуральных числах от 1 до 60.

14. Вычислите коэффициент при x^{100} в многочлене $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})^3$ после приведения всех подобных членов.

15. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, а) считаются различными? б) считаются тождественными.

16. За круглым столом сидят n рыцарей. Сколькими способами можно выбрать k рыцарей так, чтобы среди выбранных не было двух соседей?

17. Сколько существует n -значных натуральных чисел, у которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Для удовольствия

18. Абитуриент при поступлении в ВУЗ сдает 4 экзамена. Он полагает, что для поступления достаточно набрать 17 баллов. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы наверняка поступить в ВУЗ?

19. Докажите, что каждое натуральное число n может быть $2^{n-1} - 1$ различными способами представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если два представления, отличающихся хотя бы порядком слагаемых, считать различными.

20. Несколько людей садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа посадки совпадают, если каждый человек имеет тех же самых соседей в обоих случаях. Сколькими разными способами можно посадить 7 людей? В скольких случаях два данных человека из семи окажутся соседями? В скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?