

**Семінар 13. Розфарбування 2.**  
**15.12.2018**

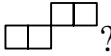
**Матрацне розфарбування.**

1. На кожній клітинці дошки  $5 \times 5$  сидить хробак. В деякий момент часу усі хробаки переповзають на сусідні по діагоналі клітинки. Доведіть, що при цьому знайдеться хоча б 5 порожніх клітинок.
2. Гра «Летючі куточки». В лівому нижньому куті дошки  $12 \times 12$  стоять 9 шашок, котрі утворюють квадрат  $3 \times 3$ . За один хід можна вибрати деякі дві шашки і переставити одну з них симетрично відносно іншої (не виходячи при цьому за границю дошки). Чи можна за декілька кроків пересунути ці шашки так, щоб вони утворили квадрат  $3 \times 3$  в: а) лівому верхньому куточку; б) правому верхньому куточку?
3. Чи можна замостити дошку  $1001 \times 1001$  доміношками  $1 \times 2$ , які дозволяється розташовувати тільки горизонтально, і прямокутниками  $1 \times 3$ , які дозволяється розташовувати тільки вертикально? (Дві сторони дошки умовно вважаються горизонтальними, а дві інші – вертикальними.)
4. Чи можна шахівницю розрізати на 15 вертикальних і 17 горизонтальних доміношок?
5. Чи можна дошку розміром  $7 \times 7$ , з якої вирізана кутова клітинка, розділити на прямокутники  $1 \times 2$  таким чином, щоб половина з них була розміщена горизонтально?
6. З шахівниці (розміром  $8 \times 8$ ) вирізали центральний квадрат розміром  $2 \times 2$ . Чи можна частину дошки, що залишилась, розрізати на рівні фігурки у вигляді букви "Г", які складаються з чотирьох клітинок?
7. Шаховий слон ходить по діагоналі на будь-яку кількість клітинок. Назвемо хід слона непарним, якщо слон за цей хід перемістився на непарну кількість клітинок. Через деяку кількість ходів, слон потрапив з лівого нижнього в правий верхній кут шахівниці дошки ( $8 \times 8$ ). Доведіть, що він зробив непарну кількість непарних ходів.

**Подвійне матрацне розфарбування.**

8. На шахівниці стоять декілька королів. Доведіть, що їх можна пофарбувати в чотири кольори так, щоб королі одного кольору не били один одного.
9. На клітчатому папері відмітили довільні  $n$  клітинок. Доведіть, що з них можна вибрати не менше  $n/4$  клітинок, які не мають спільних точок.

**Два матрацних розфарбування.**

10. Чи можна дошку розміром  $10 \times 10$  покрити фігурами виду ?

11. Галина Миколаївна виготовляє металеву решітку  $n \times n$ , що складається з квадратних клітинок зі стороною 1. Галина Миколаївна може використовувати лише елементи виду F, котрі складаються з чотирьох елементів довжини 1. Елементи можна повертати і перекладати довільним чином, вони можуть перекриватися і можуть дотикатися лише в місцях з'єднання або кінцях стержню довжини 1. Чи зможе Галина Миколаївна виготовити решітку для  $n=125$ ,  $n=250$ ?

## **Змішані розфарбування**

**12.** Чи можна дошку розміром  $10 \times 10$  розрізати на 25 фігур, кожна з яких або квадрат  $2 \times 2$ , або прямокутник  $1 \times 4$ , або Z-тетраміно, таким чином, щоб квадратів  $2 \times 2$  було парна кількість?

## **Не стандартні розфарбування**

**13.** З клітчатого паперу розміром  $8 \times 8$  клітинок вирізали 8 квадратиків розміром  $2 \times 2$  кожний (розрізи проходять по сторонах клітинок). Доведіть, що з нього можна вирізати ще один такий квадратик  $2 \times 2$ .

**14.** Чи можна три грані кубика  $4 \times 4 \times 4$ , котрі мають загальну вершину, обклеїти шістнадцятьма смужками  $3 \times 1$ ?