

**Семинар 12. Графы деревья.  
08.12.2018.**

**Определение 1.** Ребро, при выкидывании которого количество компонент связности графа увеличивается на 1, называется мостом.

**Определение 2.** Циклом называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер. Простым циклом называется цикл без повторяющихся вершин.

1. Докажите, что любое ребро графа или является мостом, или лежит в каком-то цикле.

**Определение 3.** Деревом называется связный граф без циклов.

Эквивалентное определение – деревом называется связный граф, любое ребро которого является мостом.

2. Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

3. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

4. Докажите, что в дереве каждые две вершины соединены ровно одним простым путем.

5. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется висячей или листок).

6. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

7. В стране Древландия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом каждые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

8. Доказать, что

- а) в дереве с  $n$  вершинами ровно  $n - 1$  ребро;
- б) в дереве не меньше двух висячих вершин;
- в) в связном графе из  $n$  вершин не меньше  $n - 1$  ребра;
- г) если в связном графе  $n$  вершин и  $n - 1$  ребро, то он – дерево.

9. Натали нарисовала на доске семь графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

**Определение 4.** Из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины. Такой подграф называется **остовное дерево** или **скелет**.

10. В городе с каждой станции метро на любую другую можно проехать. Доказать, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было по-прежнему проехать на любую другую.

11. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?

12. Маньяк Вася по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника  $20 \times 30$ . Какое наибольшее количество веревочек он может разрезать до того, как сетка распадется на куски?

**13.** Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет – всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

**14.** В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелётов; б) 196 перелётов.

**15.** В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

### Для удовольствия

**1.** В графе 100 вершин и 100 ребер. Сколько может быть мостов в этом графе?

**2.** Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

**3.** В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при этих условиях? (В королевстве действовал закон: "вассал моего вассала – не мой вассал").