Семинар 11. Полуинварианты.
24.11.2018

1. Шоколадка имеет размер 4×10 плиток. За один ход разрешается разломать один из уже имеющихся кусочков на два вдоль прямолинейного разлома. За какое наименьшее число ходов можно разбить всю шоколадку на кусочки размером в одну плитку?

2. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

3. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города А в самый удаленный от него город Б, оттуда - в самый удаленный от него город С и т.д. Докажите, что если С не совпадает с А, то путешественник никогда не вернется в А.

4. В клетках таблицы 99х99 расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

5. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d произведение чисел a – d и b – c отрицательно, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие операции можно проделать лишь конечное число раз.

6. В окружность вписан неправильный многоугольник. Если вершина А разбивает дугу, заключенную между двумя другими вершинами, на две неравные части, то такая вершина А называется неустойчивой. Каждую секунду какая-нибудь неустойчивая вершина перепрыгивает в середину своей дуги. В результате каждую секунду образуется новый многоугольник. Докажите, что сколько бы секунд ни прошло, многоугольник никогда не будет равным исходному.

7. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы по диагоналям, идущим влево вниз, от 1 в левом верхнем до 64 в правом нижнем углу: (см. рис.). Петя расставил на доске 8 фишек так, что в каждой горизонтали и на каждой вертикали оказалось по одной фишке. Затем он переставил фишки так, что каждая фишка попала на клетку с бóльшим номером. Могло ли по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце оказаться по одной фишке?

8. На плоскости расположено такое конечное множество точек М, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками так, что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника ACBD. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену, и т. д. Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?

9. На плоскости задано 2n точек. Докажите, что эти точки можно соединить n попарно не пересекающимися отрезками.

10. По кругу стоит 101 школьник. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все школьники одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый школьник, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

11. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран А может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной А стран правит не та партия, которая правит в стране А. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

12. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр "01" заменять на набор цифр "1000". Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

13. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка" состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

14. Непустые конечные множества A_1, A_2, A_3 ... состоят из целых чисел, причем при $n \geq 2$ каждый элемент множества A_n является средним арифметическим двух или более элементов множества A_{n-1}. Докажите что в этой последовательности конечное число множеств.

15. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

16. У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый – по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

17. У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берёт себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.