Графи (степінь вершини)

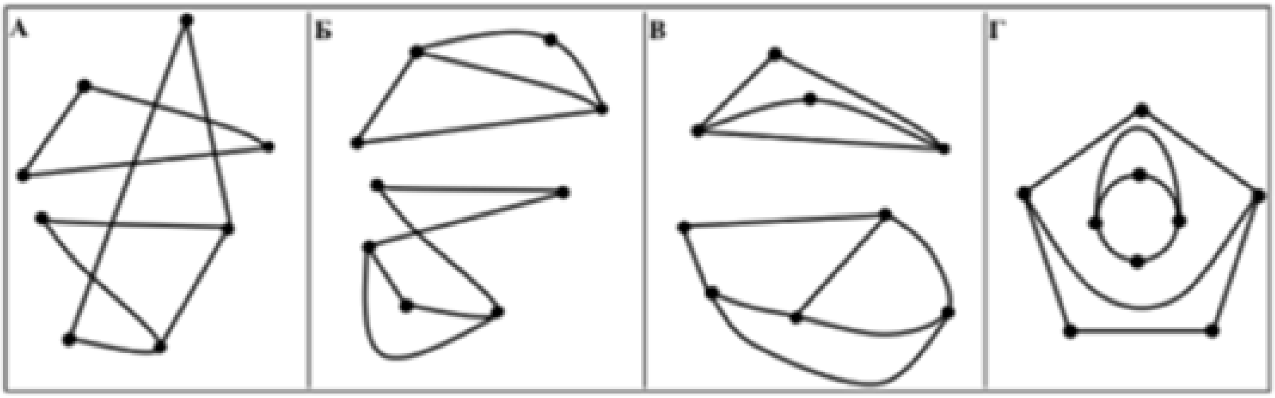
Означення 1. Будемо казати, що задано граф, якщо задана множина його вершин і про будь-яку пару різних вершин сказано, пов'язані вони ребром чи ні. На малюнку вершини зображуються точками, а ребра відрізками чи кривими.

Задача 1. Між 9 планетами Сонячної системи введено космічне сполучення. Ракети літають по наступним маршрутам: Земля Меркурій, Плутон Венера, Земля Плутон, Плутон Меркурій, Меркурій Венера, Уран Нептун, Нептун Сатурн, Сатурн Юпітер, Юпітер Марс, Юпітер Нептун і Марс Уран.

А) Намалюйте схему маршрутів. Чи можна добратись з Землі до Марса?

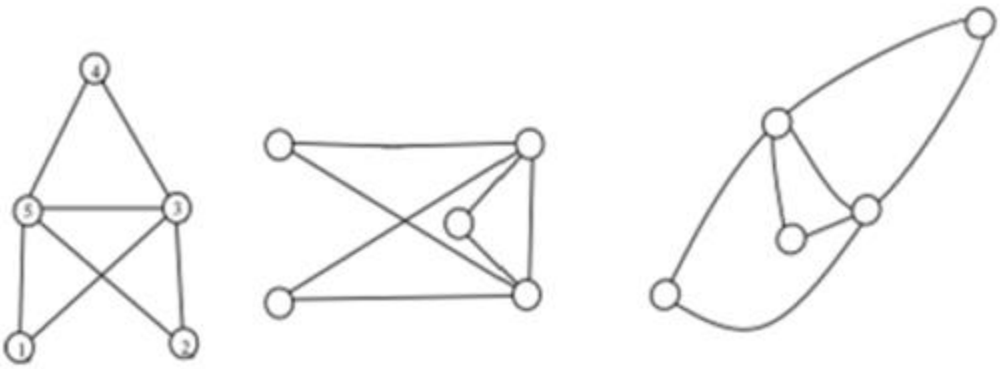
Б) Чиє серед наведених нижче схем ті, що можуть відображати схему маршрутів?
Якщо є, то які?

В) Чи є планети, котрі на схемі можна визначити однозначно?

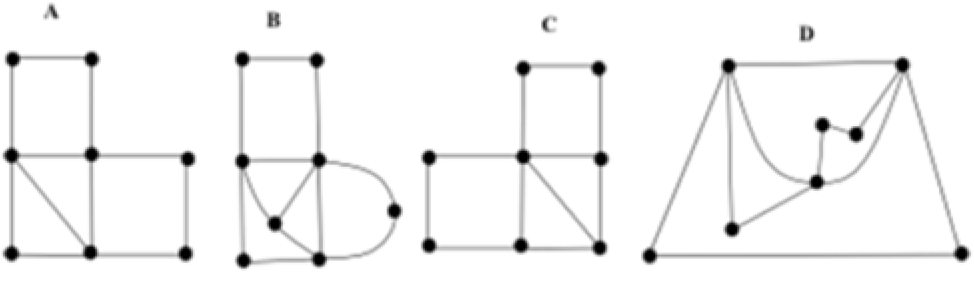


Задача 2.

Нижче наведені три зображення одного і того ж графа. Вершини одного з них пронумеровані. Пронумеруйте відповідні вершини графів, що залишились так, щоб однаково пронумеровані вершини були однаково з'єднані.



Задача 3. Чи є серед намальованих нижче графів однакові?



Означення 2. Степенем вершини будемо називати кількість ребер яка виходить з неї.

Задача 4. (*Лема о рукопотисканнях***)**. В графі сума степенів всіх вершин рівна подвоєній кількості всіх ребер.

Задача 5. Чи можуть степені вершин в графі бути рівними:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

Задача 6. Чи можна на площині намалювати 9 відрізків так, щоб кожний перетинався рівно з трьома іншими?

Задача 7. Чи може існувати многогранник, в якому одна грань п'ятикутна, а інші чотирьох або шестикутні?

Задача 8. Чи можна намалювати 13 кіл так щоб кожне торкалась рівно трьох інших кіл.

Задача 9. В країні з кожного міста виходить 100 доріг і з будь-якого міста можна доїхати до будь-якого іншого. Одну дорогу зачинили на ремонт. Доведіть, що і тепер з довільного міста, можна доїхати до будь-якого іншого.

Задача 10. Кожне з ребер повного графа з 9-ма вершинами пофарбовано в синій або червоний колір. Доведіть, що є або чотири вершини, усі ребра між котрими – сині, або є три вершини, усі ребра між котрими – червоні.

Задача 11. Кожна деталь конструктора – це скобка у вигляді літери П, яка складається з трьох одиничних відрізків. Чи можна з деталей цього конструктора спаяти повний каркас куба $2\times2\times2$, розбитого на кубики $1\times1\times1$? (Каркас складається з 27 точок, які з'єднані одиничними відрізками; будь-які дві сусідні точки повинні бути з'єднані рівно одним відрізком.)

Задача 12. Чи існує граф з 100 вершинами, степені котрих рівні 1, 1, 2, 2, ..., 50, 50.

Задача 13. На виставці котів кожен відвідувач погладив рівно трьох котів. При цьому виявилось, що кожного кота погладили рівно три відвідувача. Доведіть, що відвідувачів було рівно стільки ж, скільки і котів.

Задача 14. Чи можуть степені вершин в графі бути рівними: 6, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 2?

Задача 15. Яку найбільшу кількість коней можна розставити на дошці 5×5 так, щоб кожний з них бив рівно двох інших?

Задача 16. В компанії з семи людей будь-які шість можуть сісти за круглий стіл так, що кожні два сусіда виявляться знайомими. Доведіть, що і всю компанію можна усадити за круглий стіл так, що кожні два сусіда виявляться знайомими.