



Державна наукова установа  
"Київський академічний університет"

Кафедра математики

# Теорія чисел / Number theory

## Силабус навчальної дисципліни

### • Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Математика</i>
Статус дисципліни	<i>вибіркова</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>I курс, осінній або весняний семестр, II курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів (150 годин)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>екзамен</i>
Розклад занять	<i>лекція – раз на тиждень (32 годин); семінар – 1 раз на два тижні (16 годин); самостійна робота 72 год., у тому числі на виконання індивідуальних/домашніх завдань – 40 год</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Кафедра математики (Інститут математики НАН України) Лектор: Марія Власенко, професор Математичного інституту Польської академії наук, masha.vlasenko@gmail.com Семінарські заняття: Марія Власенко</i>
Розміщення курсу	<i>https://www.imath.kiev.ua/~mariyka/nt/ платформа для онлайн підключення: Zoom</i>

### • Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою курсу є впровадження основних концепцій теорії чисел, як алгебраїчних так і аналітичних. Ми почнемо з питань факторизації, обговоримо неоднозначність розкладу на множники цілих чисел у числових полях та виправлення цієї проблеми при переході від чисел до ідеалів. Розглянемо арифметику лишків, доведемо закон квадратичної взаємності, вивчимо скінченні поля та  $p$ -адичні числа. Друга частина курсу присвячена аналітичним методам. Ми поговоримо про розподіл простих чисел, розглянемо дзета-функцію та деякі інші ряди Діріхле, доведемо теорему про прості числа у арифметичних прогресіях. Якщо вистачить часу, ми закінчимо цей курс вступом до модулярних форм та сформулюємо теорему про модулярність еліптичних кривих.

Курс супроводжуватимуть семінарські заняття, на яких студенти розв'язуватимуть задачі та вчитимуться користуватися комп'ютерною алгеброю для дослідження теоретикочислових питань.

The goal of this course is to introduce the basic concepts of number theory, both analytic and algebraic. We begin with questions of factorisation, evidence non-uniqueness of factorisation of integers in number fields and remedy this problem by passing from numbers to ideals. We then review arithmetic of residues, prove the quadratic reciprocity law, study finite and  $p$ -adic fields. The second part of the course deals with analytic

methods. We will discuss the distribution of primes, zeta and L-functions, and prove the theorem on primes in arithmetic progressions. If time permits we will introduce modular forms and state the modularity theorem for elliptic curves.

The course will be accompanied by tutorials in which students will solve problems and learn to use computer algebra to study numbertheoretical questions.

## 2. Необхідні попередні знання та навички, результати навчання

### Необхідні попередні знання та навички:

Лінійна алгебра, основи аналізу, теорії функцій комплексної змінної, топології та теорії груп. Знання теорії кілець та модулів не є необхідним але допоможе у розумінні деяких розділів.

### Результати навчання:

Після засвоєння курсу студенти

- *умітимуть оперувати з алгебраїчними числами,  $p$ -адичними числами та елементами скінченних полів; знатимуть та умітимуть застосовувати основні структурні твердження про ці об'єкти;*
- *розумітимуть зв'язок між дискретними об'єктами, такими як прості числа або розв'язки алгебраїчних рівнянь над скінченними полями, та аналітичними функціями;*
- *знатимуть деякі нерозв'язані проблеми та гіпотези сучасної теорії чисел;*
- *умітимуть користуватися комп'ютерною алгеброю для проведення числових експериментів і перевірки гіпотез.*

## 3. Зміст навчальної дисципліни

**Тема 1. Подільність, факторизація та алгебраїчні цілі числа.** Алгоритм Евкліда та однозначність розкладу на множники у деяких кільцях, кільця цілих у квадратичних полях, числові поля, ідеали та однозначність факторизації у областях Дедекінда.

**Тема 2. Арифметика лишків та скінченні поля.** Мала теорема Ферма та її узагальнення, китайська теорема про лишки, існування примітивних елементів та структура групи оборотних лишків за модулем  $N$ , мультиплікативна група скінченного поля, розв'язки алгебраїчних рівнянь над скінченними полями.

**Тема 3.  $p$ -адичні числа.** Конструкція  $p$ -адичних чисел, лема Гензеля та  $p$ -адична реалізація алгебраїчних чисел,  $p$ -адичні неперервні функції.

**Тема 4. Дзета-функція, ряди Діріхле та розподіл простих чисел.** Дзета-функція Рімана, її аналітичне продовження та значення у цілих точках, теорема про розподіл простих чисел, теорема Діріхле про прості числа у арифметичних прогресіях.

**Тема 5. Вступ до модулярних форм.** Ряди Ейзенштейна, розмірність просторів модулярних форм, оператори Гекке, тета-функції.

## 4. Навчальні матеріали та ресурси

1. K. Ireland, M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, Graduate Texts in Mathematics 84
2. J.-P. Serre, A Course in Arithmetic, Graduate Texts in Mathematics 7
3. N. Koblitz,  $p$ -adic Numbers,  $p$ -adic Analysis and Zeta-Functions, Graduate Texts in Mathematics 58
4. I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers
5. J. Neukirch, Algebraic Number Theory
6. PARI/GP computer algebra system <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>

## 5. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента розраховується за 100 бальною шкалою.

1. Рейтинг студента з кредитного модуля складається з балів, що він отримує за:

– неперервну роботу: домашні завдання за темою лекцій, доповіді на семінарських заняттях, додаткові індивідуальні завдання; загалом не більше 100 балів за неперервну роботу.

– екзамен (як підсумковий контроль засвоєння курсу); 0–100 балів.

2. Критерії нарахування балів:

*Виконання домашньої роботи* оцінюється у 0-5 балів, доповідь на семінарському занятті у 0-5 балів, бали за додаткові індивідуальні завдання розраховуються в залежності від складності завдання.

3. Екзамен проходить в усній формі (за матеріалами лекцій та семінарських занять). Метою контролю є перевірка рівня засвоєння матеріалу, здобутих навиків та компетентностей, здатності використання студентом отриманих знань для подальшого навчання.

**Календарний контроль:** проводиться двічі на семестр за кожним модулем як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу. Умовою успішного закриття модулю є отримання не менше 60 балів. Умовою допуску до заліку є отримання не менше 120 балів за два модулі.

**Підсумкова оцінка:**  $O = M1 * 0,2 + M2 * 0,2 + E * 0,6$ , де M1 – оцінка за перший модуль, M2 – оцінка за другий модуль, E – оцінка за екзамен.

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:**

Кількість балів	Шкала ЄКТС	Оцінка
90-100	A	Відмінно
85-89	B	Добре
75-84	C	
65-74	D	
60-64	E	Задовільно
Менше 60	FX	Незадовільно
Не виконані умови допуску		Не допущено

Силабус навчальної дисципліни: Теорія чисел

Складено: проф. Марія Власенко

Рекомендовано науково-методичною радою кафедри математики (протокол № 3 від 07.08.2022)

Затверджено кафедрою математики (протокол № 8 від 13.08.2022)