

Програма вступних іспитів

на освітньо-наукову програму підготовки здобувачів вищої освіти
за освітнім ступенем “магістр” зі спеціальності 111 «Математика»
Київського академічного університету

1. Математичний та функціональний аналіз

1. Границя послідовності. Неперервність функцій. Типи розривів. Неперервність елементарних функцій.
2. Похідна та диференціал функцій однієї та кількох змінних. Умови умови диференційовності функцій однієї і кількох змінних.
3. Достатні умови локального екстремуму функції кількох змінних.
4. Формула Тейлора. Ряди Тейлора елементарних функцій.
5. Інтеграл Рімана, умови його існування. Формула Ньютона-Лейбніца.
6. Формули Гріна, Гаусса-Остроградського, Стокса.
7. Числові та функціональні ряди. Сума ряду. Ознаки збіжності рядів. Абсолютна та рівномірна збіжність.
8. Властивості сум функціональних рядів: теореми про неперервність, інтегровність та диференційовність.
9. Ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є в точці.
10. Поняття міри Лебега. Вимірні функції. Критерій вимірності.
11. Збіжність за мірою та збіжність майже всюди.
12. Інтеграла Лебега. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.
13. Метричні простори. Фундаментальні послідовності. Теорема Банаха про стискаючі відображення.
14. Банахові простори. Приклади.
15. Гільбертів простір. Ортонормовані базиси. Загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі.
16. Лінійні, неперервні, обмежені оператори. Норма оператора.
17. Теорема Гана-Банаха.
18. Теорема Банаха про обернений оператор.
19. Принцип рівномірної обмеженості.
20. Компактні оператори та теореми Фредгольма.
21. Теорема про спектр компактного оператора.

2. Алгебра

1. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
2. Лінійно незалежні системи векторів. Теорема про існування базису у скінченновимірному векторному просторі. Теорема про ранг матриці.
3. Визначники, їх властивості та застосування. Формули Крамера.
4. Лінійні перетворення. Ранг і ядро лінійного перетворення. Характеристичний многочлен.

5. Формули заміни координат вектора і матриці лінійного перетворення при зміні базису.
6. Жорданова нормальна форма лінійного оператора (матриці).
7. Канонічний вигляд самоспряженого оператора в евклідовому просторі.
8. Закон інерції дійсних квадратичних форм.
9. Критерій Сильвестра.
10. Поняття групи та кільця. Поведінка підгруп в групах та ідеалів в кільцях відносно перетинів та під дією гомоморфізмів. Гомоморфізми та ізоморфізми.
11. Основна теорема про гомоморфізм груп.
12. Теорема Лагранжа про порядки групи та підгрупи.
13. Кільця та поля лишків.

3. Аналітична та диференціальна геометрія

1. Векторний та мішаний добуток векторів. Їх вирази через координати векторів-співмножників.
2. Взаємне розташування двох прямих (умова мимобіжності, паралельності, перетину, збігу).
3. Головні напрямки ліній другого порядку. Характеристичне рівняння. Канонічні рівняння ліній другого порядку.
4. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку в просторі.
5. Зведення рівняння поверхні другого порядку до найпростішого вигляду.
6. Інваріанти ліній другого порядку.
7. Тригранник Френе, кривина та скрут кривої. Формули Френе.
8. Повна та середня кривина поверхні. Класифікація точок на поверхні. Теорема Гаусса про повну кривину поверхні.

5. Елементи топології

1. Поняття топологічного простору. Бази та передбаза топології. Замикання, внутрішність та межа множини.
2. Неперервні відображення.
3. Аксиоми відокремлюваності. Регулярні та нормальні простори. Лема Урисона.
4. Зв'язність та лінійна зв'язність.
5. Скрізь щільні та ніде не щільні множини.
6. Компактні множини Критерії компактності.
7. Властивості неперервних функцій на компактних просторах.
8. Добуток топологічних просторів.

6. Комплексний аналіз

1. Поняття аналітичної функції в точці. Умови Коші-Рімана. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної функції комплексної змінної. Конформні відображення.
2. Класифікація аналітичних функцій за їх особливими точками: цілі функції, мероморфні функції.

3. Теорема Міттаг-Лефлера про існування мероморфних функцій.
4. Теорема Коші про інтеграл від аналітичної функції.
5. Основні поняття теорії аналітичного продовження.
6. Теорема про аналітичність суми степеневого ряду в крузі збіжності.
7. Теорема Коші про лишки.
8. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

7. Диференціальні рівняння

1. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку. Найпростіші типи диференціальних рівнянь і методи їх розв'язання.
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Методи їх розв'язку.
3. Побудова фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та лінійної однорідної системи зі сталою матрицею.
4. Метод варіації довільних сталих для знаходження розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь довільного порядку та систем диференціальних рівнянь.
5. Метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

8. Рівняння математичної фізики

1. Постановки основних задач математичної фізики та їх фізичний зміст.
2. Задача Штурма-Ліувілля. Основні властивості власних функцій та власних значень.
3. Гармонічні функції та їх властивості. Їх зв'язок з аналітичними функціями комплексної змінної.
4. Поняття фундаментального розв'язку для рівняння теплопровідності.
5. Функція Гріна неоднорідної крайової задачі Діріхле в крузі.

9. Теорія ймовірностей та математична статистика

1. Поняття ймовірності та ймовірнісного простору. Класичне та геометричне означення ймовірності.
2. Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події. Формула повної ймовірності та формула Байеса.
3. Дискретні та абсолютно неперервні величини. Функція розподілу та її властивості.
4. Математичне сподівання та дисперсії випадкової величини (дискретний та неперервний випадки).
5. Незалежні випадкові величини. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми незалежних величин.
6. Оцінки статистичних параметрів та їх властивості (незміщеність, консистентність, асимптотична нормальність). Ефективні оцінки.
7. Метод моментів знаходження точкових оцінок.
8. Метод максимальної правдоподібності.